Introduction

La théorie du chaos, ainsi que les fractales, ont été deux phénomènes marquants du 20è siècle en matière de science, et l'univers des mathémtiques s'en est trouvé bouleversé.

A l'aube du 20è siècle, ce fut Henri Poincaré [1] qui découvrit notamment d'inattendus enchevêtrements de courbes :

« *Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées : chacune de ces courbes ne doit jamis se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer.* »

Il fallut attendre les années 1970 pour que ces courbes puissent enfin être tracées sur ordinateur, et que naquit le nom de « chaos », grâce à l'enthousiasme de quelques jeunes chercheurs américains. La saga de cette naissance est racontée par J. Gleick, dans son livre *la théorie du chaos*. [2] En voici quelques citations :

« *L'idée que tous les systèmes classiques déterministes que nous avions étudiés pouvaient engendrer du hasard était fascinante. Vous ne pouvez apprécier ce genre de révélation si vous n'avez pas subi le lavage de cerceau des six ou sept années d'un cursus de physique standard. On vous enseigne qu'il existe des modèles classiques où tout est déterminé par les conditions initiales, puis il y a les modèles quantiques où les choses sont déterminées, mais vous devez vous satisfaire d'une limite sur la quantité d'information initiale que vous pouvez réunir. Non-linéaire était une expression que l'on ne rencontrait qu'à la fin des livres. Quand un étudiant de physique prenait un livre de mathématiques, les équations non-linéaires se trouvaient dans le dernier chapitre. Habituellement, on passait dessus, et si l'on s'y arrêtait, tout ce qui était fait consistait à prendre ces équations non-linéaires et à les réduire à des équations linéaires, pour n'arriver qu'à des solutions approchées. C'était un exercice frustrant. Nous n'avions aucune idée de la différence réelle introduite dans un modèle par la non-linéarité. Qu'une équation puisse rebondir d'un endroit à l'autre d'une manière apparemment aléatoire, c'était plutôt excitant. Vous vous demandiez : d'où vient le mouvement aléatoire ? Je ne le vois pas dans les équations. Cela ressemblait à quelque chose de gratuit, à quelque chose sorti de rien.* »

Doyne Farmer, membre du Collectif des Systèmes Dynamiques, aussi dénommé la Cabale du chaos, à l'Université de Santa Cruz en Californie

Dynamique enfin délivrée du joug de l'ordre et la prédictabilité. Systèmes libérés pour explorer au hasard toutes leurs possiblités dynamiques. Variété excitante, richesse de choix, abondance de perspectives.

Joseph Ford, Georgia Institute of Technology.

---

[1] On pourra lire à ce sujet deux articles parus sur Internet :
J.C. Yoccoz, *Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré*, lettre du Collège de France, 2010.
C Villani, *La meilleure et la pire des erreurrs de Poincaré*, APMEP 2012.

[2] Editions Flammarion, 1991.

Le cours qui suit et que j'ai appelé *ordre et chaos* donne un aperçu des multiples floraisons de cette théorie du *chaos déterministe* et de la dialectique qui relie l'ordre au chaos. Il fusionne l'aspect théorique et la pratique, en l'occurrence l'expérimentation sur ordinateur.

Mais cela ne répondra pas à tous les problèmes, car comme l'écrivait Paul Valéry :

« *Le déterminisme est la seule manière de se représenter le monde. Et l'indéterminisme, la seule manière d'y exister.* »

Table des matières

Ouvrages de base

* K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos, an introduction to dynamical systems*, 1997 Springer.
* H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, 1992 Springer-Verlag