I- Test de niveau

I- QCM : Répondre par vrai ou par faux à chacune de ces 20 questions

(*Si c'est juste on gagne un point, et si c'est faux on enlève un point. Le total sera compris entre 20 et -20*)

1) Pour tout a>0 et tout b>0 on a $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

2) Pour tout a , tout b et tout c avec $c \neq -a$, on a $\frac{a+b}{a+c}=\frac{1+\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}}$

3) Pour tous a, b, c, d, tous non nuls, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$

4) Pour tout a>0 et tout n entier positif $\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n$

5) Pour tous a et b strictement positifs $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

6) Pour tout a et tout b, $|a\,b| = |a|\,|b|$

7) Pour tout a et tout b, $|a - b| = |a| - |b|$

8) Pour tout a et tout entier b>0 $|a|^b=\left|a^b\right|$

9) Pour tout a , $\sqrt{a^2}=a$

10) Pour tout a>0 et tout entier b>0 $a\ a^b=a^{b+1}$

11) Pour tout a non nul $\frac{a}{a^b}=a^{-b}$

12) Pour tous a, b et c strictement positifs $a\ b^c=(ab)^c$

13) Pour tous a, b et c strictement positifs $a^{b+c}=a^b a^c$

14) Pour tous a, b et c strictement positifs $(a^b)^c=(a^c)^b$

15) Pour tous a, b et c strictement positifs $a^{(b^c)}=(a^b)^c$

16) Pour tout a et tout b $e^{a+b}=e^a+e^b$

17) Pour tout a>0 et tout b $a^b=e^{b\ln a}$

18) Pour tous a>b>0 $\ln(a-b)=\frac{\ln a}{\ln b}$

19) Pour tout a $\ln(a^2)=2\ln a$

20) Pour tout a strictement positif $\ln(\sqrt{a})=\frac{\ln a}{2}$

Dans tout ce qui suit chaque question est notée sur deux points

II- Exercice d'étude de fonctions

Soit f la fonction de x définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-2x}$

1) Calculer la dérivée $f'(x)$. On rappelle que $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} u'(x)$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3) Etudier la limite de f en $+\infty$. On rappelle qu'en cas d'indétermination l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x.

4) Soit C la courbe représentative de f. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1/2. Construire la courbe C.

III- Exercice de calcul

1) Factoriser le polynôme $4x - x^3$ en produit de trois facteurs.

2) Déterminer son signe suivant les valeurs de x.

3) Compléter la partie manquante de cette identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ...)$ .En déduire une factorisation de $x^3 - 8$ en produit de deux facteurs. Pourquoi ne peut-il pas être factorisé en produit de trois facteurs ?

4) On considère le quotient $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{x^3 - 8}$. Le simplifier au mieux. Combien vaut $f(2)$?

IV- Questions subsidiaires

1) Il existe trois routes menant de la ville A à la ville B. Il existe trois routes menant de la ville B à la ville C. Combien y a-t-il de façons d'aller de A à C ?

2) On se place dans un plan avec un repère (O,x,y) orthonormé. Quelle est l'équation d'une droite ?

Note globale du test sur 40

Corrigé du test

I- QCM

1) Faux. On ne peut casser une fraction que dans le cas d'une addition au numérateur : $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$.

2) Faux. Dans $\dfrac{a+b}{a+c}$, on ne peut diviser le haut et le bas par a que si a n'est pas nul.

3) Vrai. Diviser, c'est multiplier par l'inverse.

4) Vrai. $\sqrt{a^n} = \sqrt{a.a.a....a} = \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}...\sqrt{a} = (\sqrt{a})^n$

5) Vrai. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. On a multiplié en haut et en bas par $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, la quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

6) Vrai. On peut casser une valeur absolue contenant des multiplications.

7) Faux. On n'a pas le droit de casser une valeur absolue contenant des additions ou des soustractions. On a seulement ce que l'on appelle l'inégalité triangulaire : $|a+b| \le |a|+|b|$.

8) Vrai. On peut casser une valeur absolue contenant des multiplications.

9) Faux. Si a est positif (ou nul) on a bien $\sqrt{a^2} = \sqrt{a.a} = \sqrt{a}\sqrt{a} = a$. Mais si a est négatif, $-a$ est positif, et $\sqrt{a^2} = \sqrt{a.a} = \sqrt{(-a)(-a)} = \sqrt{-a}\sqrt{-a} = -a$. Une racine carrée n'existe que si ce qui est sous le radical est positif ou nul.

10) Vrai. $a.a^b = a.a.a.....a = a^{b+1}$.

11) Faux. Ce qui est juste, c'est : $\dfrac{a}{a^b} = a^{1-b}$

12) Faux. Ce qui serait juste, c'est : $(ab)^c = a^c b^c$.

13) Vrai. $a^{b+c} = a.a.a.....a = a^b a^c$ pour b et c entiers naturels, et cela se généralise à b et c quelconques.

14) Vrai. $(a^b)^c = a^{bc} = a^{cb} = (a^c)^b$.

15) Faux. $(a^b)^c = a^{bc}$ et non pas a^{b^c}.

16) Faux. $e^{a+b} = e^a e^b$ *et non pas* $e^a + e^b$.

17) Vrai. $a = e^{\ln a}, a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \ln a}$.

18) Faux. Ce qui est juste, c'est $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$. Le logarithme transforme une division en soustraction, et non pas l'inverse.

19) Faux. *ln a* n'existe que si a est positif.

20) Vrai. $\ln\sqrt{a} = \ln a^{1/2} = \frac{1}{2}\ln a$. Le logarithme transforme une puissance en multiplication.

II-

1) $f'(x) = 2x.e^{-2x} + x^2.e^{-2x}(-2) = 2x(1-x)e^{-2x}$. Elle est du signe de $x(1-x)$ puisque l'exponentielle est toujours positive. Le trinôme $x(1-x) = -x^2+x$ a pour racines 0 et 1. Il est du signe de $-a$ (dans ax^2+bx+c), ici positif, entre les racines, et négatif ailleurs. On en déduit le tableau de variations.

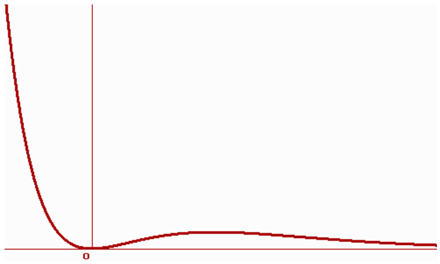
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

2) Lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ est de la forme $+\infty$ x $+\infty = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3) En $+\infty$, $f(x)$ est de la forme $+\infty$ x 0. Dans ce cas d'indétermination, l'exponentielle l'emporte sur la puissance de x. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe admet une asymptote qui est l'axe des x.

4) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}e^{-1}$, $f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-1}$. La tangente à la courbe a pour coefficient directeur f ’(1/2). Son équation est : $Y-\frac{1}{4e}=\frac{1}{2e}(X-\frac{1}{2})$, ou encore $Y=\frac{1}{2e}X$. Elle passe par l’origine.

5)



III-

1) $4x-x^3=x(4-x^2)=x(x+2)(-x+2)$

2) On fait un tableau de signes

x		-2		0		2	
x	−		−	0	+		+
x+2	−	0	+		+		+
-x+2	+		+		+	0	−
signe de $4x-x^3$	+	0	−	0	+	0	−

3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Le trinôme x^2+2x+4 a pour discriminant : 4-16<0. Il n’a pas de racines réelles et n’est pas factorisable.

5) $f(x)$ n’existe pas lorsque le dénominateur est nul, c’est-à-dire pour x^3-8 = 0, soit x=2. $f(x)=\frac{4x-x^3}{x^3-8}=\frac{x(x+2)(-x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{-x(x+2)}{x^2+2x+4}$ avec x différent de 2. Et f(2) n’existe pas.

IV-

1)

Il y a trois routes menant de *A* à *B* . **Chaque fois** que l’on en prend une, il y a trois routes de *B* à *C*. D’où au total 3 . 3 = 9 façons d’aller de *A* à *C*. C’est en quelque sorte la définition de la multiplication.

2) On distingue deux cas :

- Une droite verticale a pour équation x = constante, car tous ses points ont la même abscisse (la pente d’une telle droite est infinie).
- Une droite non verticale a pour équation $y = a\, x + b$, avec a qui est la pente, et b l’ordonnée à l’origine.

Démontrons cela.

Une droite (non verticale) peut être définie par un point $A(x_0,y_0)$ et un vecteur directeur non nul (α,β) avec α différent de 0. La pente de la droite est alors β/α, c’est-à-dire une variation de l’ordonnée sur la variation correspondante de l’abscisse. Un point M (x,y) appartient à la droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{V}$ ont la même direction, ce qui signifie que $\overrightarrow{AM} = k\vec{V}$ avec k réel. Cela se traduit en coordonnées par

x-$x_0 = k\alpha$

y-$y_0 = k\beta$.

On vient d'obtenir ce que l'on appelle les équations paramétriques de la droite. Quand k augmente à partir de 0, le point M se déplace sur la droite partir du point A dans le sens du vecteur directeur $\vec{V}$. Et si k diminue du côté négatif, le point M se déplace de l'autre côté.

Maintenant éliminons k :

$k=(x\text{-}x_0)/\alpha$

$y\text{-}y_0=k\,\beta$, d'où $y - y_0 = (\beta/\alpha)\,(x - x_0)$ ou encore $y - y_0 = a\,(x - x_0)$. C'est l'équation d'une droite passant par le point A (x_0, y_0) et de pente $a = \beta/\alpha$.

Cela s'écrit aussi $y = a\,x - a\,x_0 + y_0$, qui est de la forme $y = ax + b$, où b est l'ordonnée du point d'abscisse x=0 ; b est appelée l'ordonnée à l'origine.

On vient de montrer que l'équation d'une droite non verticale est toujours de la forme

$y = a\;x + b$.

Cela ne prouve pas pour autant que derrière toute équation de la forme $y = a\;x + b$ se cache forcément une droite. Donnons-nous alors une équation de la forme $y = a\;x + b$. Est-ce toujours l'équation d'une droite non verticale ? La réponse va être oui. En effet, prenons un point A (x_0, y_0) vérifiant l'équation. On a :

$y\; = a\,x + b$

$\underline{y_0 = ax_0 + b}$

$y - y_0 = a\,(x - x_0)$ par soustraction. Il s'agit là, comme on l'a vu, de l'équation d'une droite passant par A et de pente a.

Digression : A propos de quelques paradoxes mathématiques

Il est question de paradoxe quand une démonstration apparemment rigoureuse aboutit à des résultats manifestement faux. Cherchez l'erreur !

Premier paradoxe : 1 = 2

Prenons deux nombres a et b égaux, soit $a = b$. On en déduit :

$ab = a^2$, puis $ab - b^2 = a^2 - b^2$, soit $b(a\text{-}b) = (a\text{-}b)(a\text{+}b)$. En divisant les deux membres par $a\text{-}b$, il reste $b = a+b$, ou encore, puisque $a = b$, $b = 2b$, d'où 1 = 2.

D'où vient l'erreur ? On ne peut diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre que si celui-ci est différent de 0. Ici on a divisé par $a - b = 0$.

Deuxième paradoxe : Tous les nombres sont égaux

Appelons c la différence de deux nombres quelconques a et b : $c = a - b$. Multiplions les deux membres par $a - b$: $(a - \mathrm{b})^2 = c(a - b)$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$. Arrangeons cette égalité ainsi : $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$, ou $a(a - b - c) = b(a - b - c)$. Divisons les deux membres par $a - b - c$. Il reste $a = b$. Deux nombres quelconques sont toujours égaux. D'où vient l'absurdité ? Toujours de la division par 0, ici $a - b - c$.

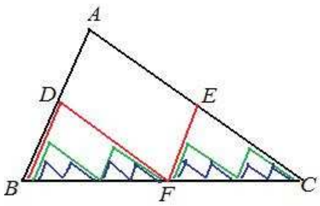
Troisième paradoxe : 2 = 3

On part de 4 – 10 = 9 – 15. Ajoutons 25/4 aux deux nombres :

4 – 10 + 25/4 = 9 – 15 + 25/4, soit $(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$. En prenant la racine carrée des deux membres, on obtient 2 – 5/2 = 3 – 5/2, d'où en ajoutant 5/2 des deux côtés 2 = 3. D'où vient

l'erreur ? Lorsque $a^2 = b^2$, on peut déduire que $a = b$ seulement si a et b sont de même signe, ce qui n'est pas le cas ici avec 2-5/2 et 3-5/2. Rappelons la règle du cours à retenir : avec a et $b \geq 0$, $a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$.

Quatrième paradoxe : La somme de deux côtés d'un triangle est égale au troisième



A partir d'un triangle *ABC*, on prend les milieux *D* et *E* des côtés *AB* et *AC*, d'où les deux triangles *BDF* et *FEC*. La ligne brisée *BDFEC* a la même longueur que la ligne brisée *BAC*, somme des deux côtés du triangle initial. Et l'on recommence le même procédé avec les nouveaux triangles. Toutes les lignes brisées ont la même longueur que *BAC*. En passant à la limite, la ligne brisée tend à se confondre avec *BC* et l'on a *BA*+*AC* = *BC*. Ici l'erreur est plus subtile : la somme des limites des deux côtés des petits triangles est *BC*, mais la limite de la somme des côtés des petits triangles est *BA*+*AC*. Eh bien, cela prouve que la limite d'une somme n'est pas forcément égale à la somme des limites.

Prenons un autre exemple en considérant les quantités :

$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$ et $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

Lorsque n tend vers l'infini, chaque terme constituant u_n et v_n tend vers 0. u_n est la somme de quatre termes qui tendent chacun vers 0, donc u_n tend vers 0. Mais v_n qui est la somme d'une infinité de termes qui tendent chacun vers 0, ne tend pas vers 0, puisque chaque terme constituant v_n est supérieur ou égal à $1/2n$ et comme il y a n termes, on a toujours $v_n \geq n/2n$, soit $v_n \geq 1/2$. Ainsi la somme d'une infinité de termes tendant vers 0 n'est pas forcément égale à 0. La somme des limites (0) n'est pas égale à la limite de la somme.