

3. Raisonnement par récurrence

Les raisonnements en mathématiques se font en général par une suite de déductions, du style : *si ... alors*, ou mieux encore si c'est possible, par une suite d'équivalences, du style : *si et seulement si*. Mais il existe un autre type de raisonnement, que l'on appelle le raisonnement par récurrence, particulièrement adapté lorsqu'il est demandé de prouver une formule dépendant d'un paramètre n entier. Prenons un premier exemple.

Imaginons que l'on nous demande de démontrer la formule suivante :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ quel que soit le nombre entier positif } n.$$

Si nous étions astucieux comme le fut Karl Friedrich Gauss à l'âge de sept ans, nous écririons, en appelant S_n la somme des n premiers nombres entiers positifs :

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \end{array}$$

Additionnons membre à membre ces deux égalités, en procédant colonne par colonne

$$\begin{aligned} 2S_n &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ &= n(n+1), \text{ d'où la formule } S_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Mais si nous n'avons pas cette bonne idée, que faire ? On peut toujours se rabattre sur un raisonnement par récurrence. Pour prouver que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ quel que soit n , il y a deux démonstrations à faire :

- On montre que la formule est vraie au rang initial $n = 1$: en effet $1 = (1 \cdot 2) / 2$.
- On suppose la formule vraie à un certain rang n , et l'on montre qu'elle reste vraie au rang suivant $n + 1$:

$$\text{Prenons } S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ où l'on a utilisé notre}$$

hypothèse de récurrence, la formule étant supposée vraie au rang n . Il reste à factoriser et à réduire au même dénominateur :

$$= (n+1) \left((n+1) \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

C'est bien la formule au rang $n + 1$.

Ces deux démonstrations étant faites, nous pouvons alors affirmer que la propriété est vraie pour tout rang n . En effet on a vu qu'elle est vraie au rang initial (première démonstration). Et comme elle est vraie au rang 1, elle est vraie au rang 2 (deuxième démonstration). Comme elle est vraie au rang 2, elle est vraie au rang 3 (toujours la deuxième démonstration), et ainsi de suite. En faisant *marcher* la récurrence, la formule est vraie pour tout n .

Le raisonnement par récurrence fonctionne comme l'évolution d'une épidémie. Prenons l'exemple d'une rangée d'insectes, alignés du premier insecte au dernier, celui-ci pouvant être infiniment loin, et mettons-les dans un contexte d'épidémie : si l'un est malade il transmet la maladie à son voisin de droite. Vont-ils être tous malades pour autant ? Non. Mais si le premier est malade, alors oui, la

maladie va se répandre, par transmission au voisin, à tous les insectes. Il est là, le raisonnement par récurrence, avec ses deux contraintes : fonctionner au départ, et se transmettre de l'un au voisin. Alors tout le monde est atteint.

Résumons le raisonnement par récurrence. On est dans le contexte où l'on doit démontrer qu'une formule est vraie quel que soit n . Cela veut dire que l'on a en fait une infinité de formules à démontrer, une pour chaque valeur de n . Pour cela :

- 1) On montre que la formule est vraie au départ.
- 2) On suppose qu'elle est vraie à un certain rang n , et l'on montre qu'elle reste vraie au rang suivant.

Il existe une variante que l'on utilise dans certains cas :

- 1) On montre que la formule est vraie au départ.
- 2) On suppose que la formule est vraie **jusqu'à** un certain rang n , et l'on montre qu'elle reste vraie au rang suivant.

Ce qu'il convient de ne jamais dire, comme on lit parfois : « On suppose que la propriété est vraie pour n quelconque, montrons que cela reste vrai pour $n + 1$. ». Cela veut dire qu'on suppose que c'est toujours vrai. On n'a plus rien à démontrer ! Et on n'a rien démontré du tout.

■ Exemples classiques

1. Montrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **pour tout** $n \geq 1$

Faisons un raisonnement par récurrence.

- La formule est vraie au départ pour $n = 1$: on a bien $1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$.
- Supposons la formule vraie à un certain rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ grâce à l'hypothèse de récurrence. Puis on

factorise et l'on réduit au même dénominateur :

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right) = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \text{ Le trinôme } 2n^2 + 7n + 6$$

admet comme racines -2 et $-3/2$, d'où

$$2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)(n+3/2) = (n+2)(2n+3). \text{ Finalement :}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ et la formule est bien vraie au rang } n+1.$$

2. Montrer que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

Cela revient à démontrer que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ en utilisant la formule que l'on connaît déjà sur la somme des n premiers nombres entiers. Faisons un raisonnement par récurrence.

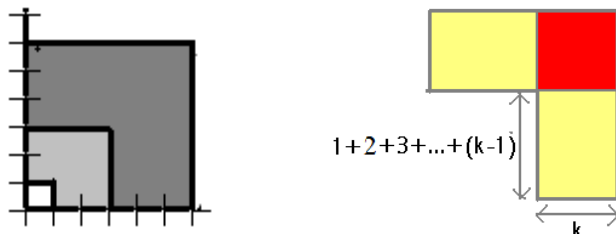
- La formule est vraie pour $n = 1$, puisque $1^3 = (1 \cdot 4)/4$.
- Supposons la formule vraie à un certain rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

et la formule est vraie au rang $n + 1$.

Remarque : On n'a pu démontrer cette formule par récurrence que parce qu'elle nous était donnée dans l'énoncé. Mais si tel n'est pas le cas, on ne sait plus comment faire. Voici comment la formule précédente sur la somme des cubes a été démontrée à l'origine, par Al Karagi (années 1000) :



Des carrés sont emboîtés les uns dans les autres, le premier de côté 1, le deuxième de côté 1 + 2, le troisième de côté 1 + 2 + 3, jusqu'au dernier de côté 1 + 2 + 3 + ... + n. Ce dernier carré a pour aire $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Cette aire peut être calculée autrement. Le grand carré se divise en

un premier petit carré de côté 1, puis en des surfaces en forme d'équerres, dont la $k^{\text{ème}}$ est illustrée sur le dessin ci-dessus à droite, et cela jusqu'à la $n^{\text{ème}}$. La $k^{\text{ème}}$ équerre se divise en deux rectangles d'aire $k(1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1))$ chacun, et d'un carré d'aire k^2 . L'aire de cette équerre est :

$$2k(1 + 2 + \dots + (k - 1)) + k^2 = 2k \frac{(k - 1)k}{2} + k^2 = k^2(k - 1 + 1) = k^3. \text{ D'où la formule:}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, et tout entier naturel n : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Faisons un raisonnement par récurrence :

- La formule est vraie pour $n = 0$, puisqu'elle devient $1 \geq 1$ pour tout $x > 0$.
- Supposons la formule vraie à un certain rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant :

Prenons l'hypothèse de récurrence : $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Multiplions par $1 + x > 0$

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$$

$$\geq 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx$$

$$\geq 1 + (n + 1)x \text{ pour tout } x > 0$$

4. Calculer la somme $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ en fonction de n (n entier naturel positif)

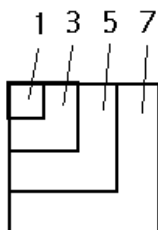
Il existe plusieurs méthodes.

La première consiste à faire des essais pour les premières valeurs de n , et de constater que le résultat semble être n^2 . Mais cette présomption ne suffit pas. Il s'agit de prouver que cette formule est vraie pour tout n , soit $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Pour cela on fait un raisonnement par récurrence, comme précédemment.

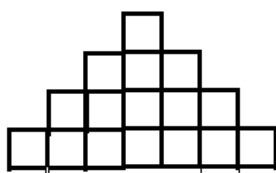
La deuxième méthode évite le raisonnement par récurrence. On se ramène à la formule sur la somme des n premiers nombres entiers :

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) \\
 &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n) - 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1-n-1) = n^2
 \end{aligned}$$

Une troisième méthode est encore plus simple, et on la trouve dans les travaux du mathématicien grec Nicomaque de Gérase (années 150). Il suffit d'emboîter des carrés de côtés $1, 2, 3, \dots, n$. Chaque équerre, après le premier carré d'aire 1, a pour aire : $3, 5, \dots, 2n - 1$. La somme de ces aires est celle du carré de côté n , soit n^2 .



Une application de cette formule : On construit un empilement de carrés, de la forme indiquée ci-dessous. On veut connaître le nombre S_n de carrés d'une telle forme de hauteur n .



A l'étage 1 le plus élevé, il y a un carré, à l'étage 2, trois carrés, etc. Si l'on appelle u_n le nombre de carrés à l'étage n , la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2$, à partir de $u_1 = 1$, d'où la formule explicite $u_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.¹ Un empilement de n étages possède : $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ carrés. On a vu que cela fait n^2 carrés.

■ Exercices corrigés

1. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (une succession de nombres) est définie par ses deux termes initiaux $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et par un lien entre un terme et les deux qui le précèdent : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Cela définit cette succession de nombres : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$. Montrer que cette suite est strictement croissante à partir de u_2 .

Il s'agit de prouver que $u_3 - u_2 > 0$, $u_4 - u_3 > 0$, etc., soit $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ à partir du rang $n = 1$. Sachant que $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$, cela revient à démontrer que $u_n > 0$ à partir de $n = 1$. Pour cela faisons un raisonnement par récurrence :

- La formule est vraie au départ : $u_1 = 1 > 0$.

¹ Pour trouver cette formule explicite, on a intérêt à écrire cette succession d'égalités :

$$u_n = u_{n-1} + 2$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} + 2$$

$$u_{n-2} = u_{n-3} + 2$$

...

$$u_2 = u_1 + 2$$

Par addition membre à membre de ces égalités, il se produit des simplifications en cascade, et il reste $u_n = u_1 + 2(n - 1)$. Pour plus de détails, se reporter au chapitre 9 sur les suites. On aura besoin de ce type de raisonnement dans les exercices qui suivent.

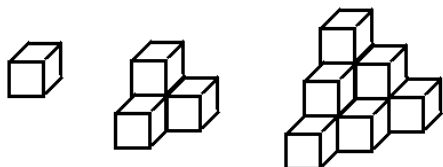
• Supposons la formule vraie jusqu'à un certain rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant :

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \text{ Avec } u_n > 0 \text{ et } u_{n-1} > 0 \text{ par hypothèse de récurrence, on a bien } u_{n+1} > 0.$$

Finalement la suite est strictement croissante à partir du rang 2.

Remarque : Pour la démonstration il a fallu utiliser l'hypothèse de récurrence : *jusqu'au* rang n . Si l'on avait dit : *supposons la formule vraie au rang* n , la démonstration n'aurait pas pu se faire.

2. Empilement de cubes



On considère cette succession d'assemblages de cubes, le premier avec $u_1 = 1$ cube, le deuxième à deux étages avec $u_2 = 4$ cubes, et ainsi de suite. On veut connaître u_n , pour n entier quelconque positif.

1) On appelle a_n le nombre de cubes placés à l'étage n ($a_1 = 1$, $a_2 = 3$, etc.). Déterminer une relation de récurrence sur a_n , puis la formule explicite de a_n (on devra trouver $a_n = n(n+1)/2$).

Pour passer de a_1 à a_2 , on ajoute 2 cubes. Pour passer de a_2 à a_3 , on ajoute 3 cubes. En généralisant, on obtient la relation de récurrence : $a_n = a_{n-1} + n$ pour $n > 1$ avec au départ $a_1 = 1$. Pour avoir la formule explicite (a_n en fonction de n), répétons la relation de récurrence en descente :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + n - 1 \\ &\dots \\ a_2 &= a_1 + 2 \end{aligned}$$

Par addition membre à membre, il se produit des simplifications en cascade, et il reste :

$$a_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n(n+1)/2.$$

Remarque : au lieu de partir de $a_1 = 1$, on aurait pu prendre $a_0 = 0$, la relation de récurrence donnant bien $a_1 = a_0 + 1 = 1$. Cela facilitera les calculs dans la question suivante.

2) En déduire la relation de récurrence vérifiée par u_n , puis trouver sa forme explicite. On aura intérêt à écrire $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

On a la relation de récurrence : $u_n = u_{n-1} + a_n$, soit $u_n = u_{n-1} + n(n+1)/2 = u_{n-1} + n^2/2 + n/2$ avec au départ $u_1 = 1$ ou si l'on veut $u_0 = 0$. Répétons cette relation en descente :

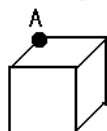
$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + n^2/2 + n/2 \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + (n-1)^2/2 + (n-1)/2 \\ &\dots \\ u_1 &= u_0 + 1^2/2 + 1/2 \end{aligned}$$

Par addition membre à membre, il se produit des simplifications en cascade, et il reste :

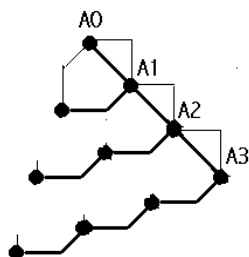
$$\begin{aligned} u_n &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)/2 + (1 + 2 + \dots + n)/2 = n(n+1)(2n+1)/12 + n(n+1)/4 \\ &= n(n+1)(2n+1+3)/12 = n(n+1)(n+2)/6. \text{ C'est la formule explicite donnant } u_n. \end{aligned}$$

3) Si vous avez suffisamment de connaissances pour faire du graphisme sur ordinateur, programmer le dessin de ces assemblages de cubes sur l'écran de l'ordinateur. Voici quelques indications :

D'abord tous ces cubes (en perspective cavalière) sont identiques, et aucun n'en cache un autre. A partir de la position d'un sommet A (x_A, y_A) sur l'écran, on peut tracer le cube correspondant.

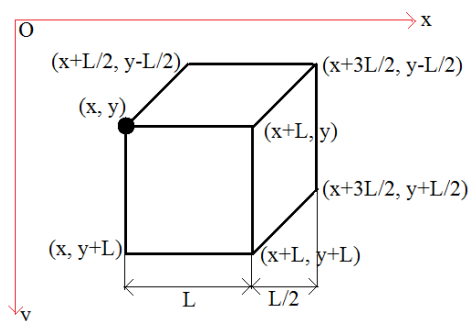


Commencer par fabriquer une fonction `cube(xa, ya)` qui se charge de ce dessin sur l'écran, en choisissant le sommet indiqué.



Puis on place sur l'écran le sommet A_0 du cube le plus haut. A partir de lui, on en déduit les sommets de tous les cubes de droite : ils sont régulièrement situés sur une droite à 45° , par exemple pour $N = 4$ étages, on a facilement les coordonnées sur l'écran de A_1, A_2, A_3 . On en déduit les autres sommets par un procédé répéti à chaque étage, comme indiqué sur le dessin. Et pour chaque sommet obtenu ainsi, on appelle la fonction `cube()` qui se charge du tracé des cubes.

Le dessin du cube en perspective cavalière est simplifié au mieux en prenant des lignes de fuite à 45° . A partir du sommet A (x, y) en haut à gauche et en appelant L la longueur du côté, on en déduit les coordonnées de tous les autres sommets du cube :



La fonction `cube()` en découle :

```
void cube(int x,int y)
{ line(x,y,x+L,y,black); line(x,y,x,y+L,black);line(x+L,y,x+L,y+L,black);line(x,y+L,x+L,y+L,black);
  line(x,y,x+L/2,y-L/2,black);line(x+L,y,x+3*L/2,y-L/2,black);line(x+L,y+L,x+3*L/2,y+L/2,black);
  line(x+L/2,y-L/2,x+3*L/2,y-L/2,black);line(x+3*L/2,y+L/2,x+3*L/2,y-L/2,black);
  floodfill(x+L/2,y+L/2,red,black); /* remplissage de la face carrée en rouge à partir de son centre
                                   jusqu'à la bordure noire */
  floodfill(x+3*L/4,y-L/4,blue,black); /* remplissage des deux autres faces visibles */
  floodfill(x+5*L/4,y+L/4,green,black);
}
```

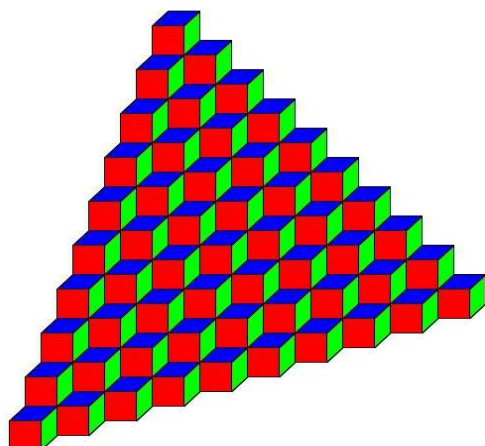
Passons maintenant au programme principal. A partir du premier cube de sommet A_0 que l'on se donne, on construit les cubes de sommets A_1, A_2 , etc., ces points ayant pour coordonnées (x_a, y_a) dans le programme. Chaque fois que l'on atteint un sommet A_i ($i > 0$), on détermine les sommets B des cubes situés au même étage, de coordonnées (x_b, y_b).

```
On se donne L et hauteur (par exemple L =32 sur l'écran de 800 sur 600, et hauteur = 10)
x0=300; y0=50; cube(x0,y0); xa=x0; ya=y0;
for(i=1;i<hauteur;i++) /* hauteur est le nombre d'étages */
{ xa+=L;ya+=L; cube(xa,ya);
  xb=xa;yb=ya;
  for(j=1;j<=i;j++)
```

```

{ xb=-3*L/2; yb+=L/2; cube(xb,yb);
}
}

```



3. Calcul approché de $1/e$

(cet exercice suppose connu le calcul intégral et les suites numériques)

1) Montrer que pour tout n entier naturel : $\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du$.

Pour la démonstration, faire un raisonnement par récurrence, en procédant notamment à une intégration par parties. Rappelons que par définition l'écriture concentrée $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ n'est autre que

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Montrons d'abord que la formule est vraie au rang $n = 0$. Le deuxième membre de la formule s'écrit $1 - \int_0^1 e^{-u} du = 1 + [e^{-u}]_0^1 = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}$. La formule est bien vérifiée.

Supposons la formule vraie à un certain rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$: Prenons le second membre de la formule au rang $n + 1$, soit

$$A = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{n+1} e^{-u} du$$

et faisons une intégration par parties en posant :

$$U = (1-u)^{n+1} \quad \text{d'où} \quad U' = -(n+1)(1-u)^n$$

$$V' = e^{-u} \quad \text{d'où} \quad V = -e^{-u}$$

$$A = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} \left[(1-u)^{n+1} e^{-u} \right]_0^1 - \frac{(-1)^{n+2}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{-u} du$$

le crochet vaut -1

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{-u} du$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{-u} du \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{-u} du = \frac{1}{e} \text{ par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

La formule reste vraie au rang $n + 1$.

2) Justifier l'encadrement $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}$

Sur $[0, 1]$, la fonction sous l'intégrale est ≥ 0 , car $(1-u)^n \geq 0$ et $e^{-u} > 0$. Par « positivité » de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \geq 0$.

D'autre part, sur $[0, 1]$, $0 \leq 1-u \leq 1$, $(1-u)^n \leq 1$, $(1-u)^n e^{-u} \leq e^{-u}$ puisque $e^{-u} > 0$. Cette inégalité est respectée par intégration, avec les bornes dans le sens croissant :

$$\int_0^1 (1-u)^n e^{-u} du \leq \int_0^1 e^{-u} du = 1 - e^{-1} \leq 1. \text{ D'où } \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}.$$

3) En conclure que $\frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

Lorsque n tend vers l'infini, l'intégrale précédente est prise en tenaille entre 0 et $1/n!$ qui tend vers 0. Elle tend vers 0. Ainsi, à la limite, la formule du a) devient :

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \dots$$

4) On pose $u_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$ ($n \geq 2$). En constatant que u_n oscille autour de $1/e$ en s'en rapprochant, avec les termes de rang pair supérieurs à $1/e$ et les termes de rang impair inférieurs, de combien de chiffres derrière la virgule est-on assuré pour avoir une valeur approchée de $1/e$ grâce à u_{10} ?

On a $u_{10} - u_9 = 1/10! = 0,00000027$. La différence entre u_9 et u_{10} est inférieure à 10^{-6} et a fortiori $u_{10} - 1/e$ est inférieur à 10^{-6} . La valeur de $u_{10} = 0,367879\dots$ est aussi la valeur approchée de $1/e$ avec six chiffres assurés derrière la virgule.

4. Dérivées d'une fonction et récurrences

(cet exercice suppose connues l'étude des fonctions et la dérivation)

Considérons la fonction f définie sur \mathbf{R} , telle que

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x \geq 0 \\ f(x) = e^{1/x} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur \mathbf{R} .

Remarquons d'abord que f est bien définie sur \mathbf{R} , puisque $1/x$ existe pour $x < 0$ et que l'exponentielle n'a aucun problème existentiel. Comme mélange de fonctions continues classiques, f est continue sur \mathbf{R}^* . Le problème de la continuité se pose à la jonction des deux morceaux de courbe, en $x = 0$. La fonction est continue à droite en 0 avec $f(0) = 0$. Pour $x < 0$, avec x qui tend vers 0, $1/x$

tend vers $-\infty$ et l'exponentielle tend vers 0^+ . Comme cette limite à gauche est la même qu'à droite, la fonction admet une limite en 0, et comme elle est égale à $f(0) = 0$, la fonction est continue en 0.

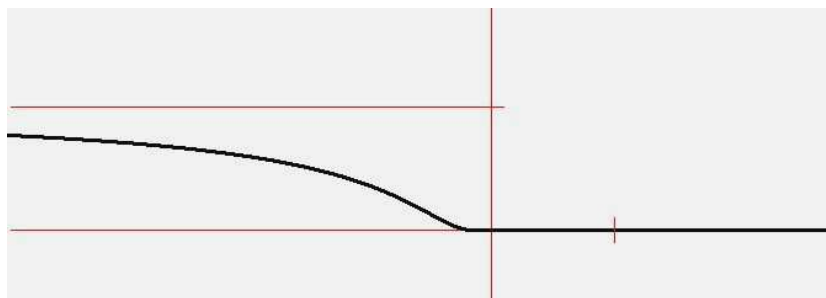
2) Montrer que f est dérivable sur \mathbf{R} .

Comme mélange de fonctions classiques dérivables sur \mathbf{R}^* , f est dérivable sur \mathbf{R}^* . Etudions la dérivabilité en 0. La dérivée à droite existe et vaut 0. Pour $x < 0$, prenons le taux d'accroissement au voisinage de 0^- , soit $e^{1/x} / x$ qui est une forme indéterminée $0/0$. Mais en posant $u = 1/x$ avec u qui tend vers $-\infty$, cela devient $u e^u$ et l'on sait que dans ce cas d'indétermination, c'est l'exponentielle qui l'emporte sur u . D'où $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. La fonction est dérivable à gauche, et comme cette dérivée est la même à droite, la fonction est dérivable en 0.

Remarquons que le fait que la fonction f soit dérivable sur \mathbf{R} entraîne que f est continue sur \mathbf{R} , ce qui redémontre la question précédente.

3) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative..

Calculons f' sur \mathbf{R}^* : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} < 0$. La fonction est décroissante sur \mathbf{R}^* . Lorsque x tend vers $-\infty$, $1/x$ tend vers 0^- et $e^{1/x}$ tend vers 0 par valeurs inférieures. La courbe admet pour asymptote la droite d'équation $y = 1$, et elle est située au-dessous. On en déduit la courbe.



3) Montrer que la dérivée seconde f'' existe sur \mathbf{R} , et la calculer.

$$f''(x) = 0 \text{ du côté des } x \text{ positifs. Pour } x < 0 : f''(x) = -\frac{1}{x^4} (-e^{1/x} - 2x e^{1/x}) = \frac{1}{x^4} (1 + 2x) e^{1/x}.$$

Reste le problème de dérivabilité en 0. Le taux d'accroissement de f'' au voisinage de 0^- est

$$-\frac{1}{x^3} e^{1/x} \text{ de la forme indéterminée } 0/0, \text{ mais avec } u = 1/x, \text{ on obtient } -u^3 e^u, \text{ et l'exponentielle}$$

l'emporte sur toute puissance de x . f'' est dérivable à gauche, et avec la même dérivée à droite, on en déduit que $f''(0)$ existe et vaut 0.

4) Grâce à un raisonnement par récurrence, montrer que pour $x < 0$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f s'écrit $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{1/x}$ où $P_n(x)$ est un polynôme. Par la même occasion, trouver la relation liant $P_{n+1}(x)$ à $P_n(x)$.

On sait déjà que $P_1(x) = -1$ et $P_2(x) = 2x + 1$ (et même $P_0(x) = 1$).

Faisons un raisonnement par récurrence :

- La formule est vraie au rang 1, avec $P_1(x) = -1$.
- Supposons la formule vraie à un certain rang n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{1/x}\right)', \\
&= \frac{1}{x^{4n}} (x^{2n} (P_n'(x) e^{1/x}) - \frac{1}{x^2} e^{1/x}) - 2n x^{2n-1} P_n(x) e^{1/x} \\
&= \frac{x^{2n-2}}{x^{4n}} (x^2 P_n'(x) - P_n(x) - 2n x P_n(x)) e^{1/x} \\
&= \frac{x^2 P_n'(x) - P_n(x) - 2n x P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{1/x}
\end{aligned}$$

Posons $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - P_n(x) - 2n x P_n(x)$ qui est aussi un polynôme. On a bien :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{1/x} \text{ qui est la formule cherchée.}$$

5) Grâce à la relation liant $P_{n+1}(x)$ à $P_n(x)$, obtenue dans la question précédente, calculer $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$. Montrer qu'à partir de P_1 , le polynôme $P_n(x)$ est de degré $n - 1$.

Pour $n = 1$, avec $P_1(x) = -1$, on retrouve $P_2(x) = 1 + 2x$

Pour $n = 2$, $P_3(x) = -6x^2 - 6x - 1$

Pour $n = 3$, $P_4(x) = 24x^3 + 36x^2 + 12x + 1$

Faisons un raisonnement par récurrence pour montrer que $P_n(x)$ est de degré $n - 1$.

- C'est vrai au départ : $P_1(x) = -1$ est de degré 0

- Supposons que $P_n(x)$ est de degré $n - 1$ à un certain rang n , et montrons que $P_{n+1}(x)$ est de degré n :

$P_n(x)$ étant de degré $n - 2$, $x^2 P_n'(x)$ est de degré n , tout comme $2n x P_n(x)$, ainsi $P_{n+1}(x)$ est bien de degré n .

5) En notant $a_n x^{n-1}$ le terme de plus haut degré de $P_n(x)$, déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n , puis donner la forme explicite de a_n .

Reprenons $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - P_n(x) - 2n x P_n(x)$. Son terme de plus haut degré, provenant du premier et du troisième terme, est tel que $a_{n+1} = (n - 1) a_n - 2n a_n = -(n + 1) a_n$.

Avec $a_1 = -1$, on retrouve $a_2 = 2$, $a_3 = -2 \times 3 = -6$, $a_4 = 4 \times 6 = 24$, etc.

Pour avoir la forme explicite, écrivons cette suite d'égalités :

$$a_n = -n a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = -(n-1) a_{n-2}$$

...

$$a_2 = -2 a_1$$

$$a_1 = -1$$

Par multiplication membre à membre, il se produit des simplifications en cascade et il reste :

$$a_n = (-1)^n n(n-1)(n-2) \dots \times 2 = (-1)^n n!$$

6) Montrer que le terme constant de $P_n(x)$ est $c_n = \pm 1$.

Reprenons $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) - P_n(x) - 2nx P_n(x)$. Sur ces trois termes, seul $P_n(x)$ a un terme de degré 0. Ainsi $c_{n+1} = -c_n$ avec au départ $c_1 = -1$. Par récurrence évidente, c_n vaut 1 pour n pair et -1 pour n impair.

6) Montrer que la fonction f est infiniment dérivable sur \mathbf{R} et que $f^{(n)}(0) = 0$.

Les dérivées $f^{(n)}(x)$ sont dérivables sur \mathbf{R}^* . Elles sont aussi dérivables à droite en 0, valant alors 0. Pour étudier la dérivabilité en 0-, prenons le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ au voisinage de 0 du côté négatif, soit $\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \frac{P_n(x)}{x^{2n+1}} e^{1/x}$. Au voisinage de 0-, $P_n(x)$ est quasiment égal à ± 1 , son terme de

plus bas degré. Et l'on sait, comme on l'a vu au 2° et au 3°, que $\frac{e^{1/x}}{x^{2n+1}}$ tend vers 0. On en déduit que la dérivée $f^{(n+1)}$ existe en 0 et qu'elle vaut 0 aussi bien à gauche qu'à droite. Comme toutes les dérivées sont nulles en 0, cela signifie que la courbe reste très collée à sa tangente (Ox) au voisinage de 0, comme on peut le vérifier sur le dessin de la courbe.

$$5. \text{ Formule } \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!} \quad (n \geq 1)$$

Démontrer cette formule.

Faisons un raisonnement par récurrence.

- La formule est vraie au rang 1 : $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{5!}$.
- Supposons la formule vraie à un certain rang n , et montrons qu'elle reste vraie au rang suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) + 5(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{5!} \end{aligned}$$

C'est bien la formule au rang $n+1$.

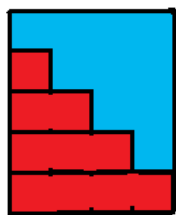
Digression : Mathématiques indiennes et puzzle

Signalons que la formule de l'exercice 4 précédent était connue en Inde dans les années 1500. Elle constituait une sorte de généralisation de la formule plus simple :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Il convient de comprendre qu'à partir du moment où une formule est connue, on peut toujours la démontrer grâce à un raisonnement par récurrence. Mais à l'origine ceux qui ont trouvé ces formules ont dû déployer des trésors d'imagination, en s'aidant le plus souvent de figures géométriques.

Reprenons la méthode utilisée par K. F. Gauss pour calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$, que nous avons vue précédemment. Il avait utilisé l'écriture à l'envers $S = 100 + 99 + \dots + 1$, et ajouté les deux égalités colonne par colonne pour trouver $2S = 100 \times 101$. En fait cette démonstration est la conséquence du dessin suivant.



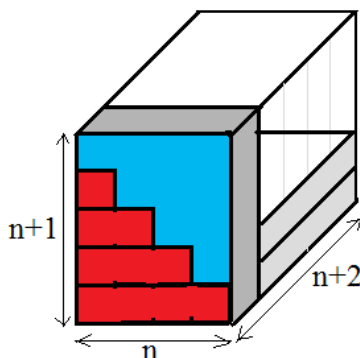
Le nombre $T_n = 1 + 2 + \dots + n$, d'ailleurs appelé nombre triangulaire de façon imagée, est représenté par des barres posées l'une sur l'autre, dont la longueur augmente d'une unité de haut en bas. Sur la figure, la surface rouge représente $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$. En construisant le rectangle de base n et de hauteur $n + 1$, celui-ci englobe deux fois le nombre triangulaire T_n (en rouge et en bleu sur le dessin pour $n = 4$), d'où la formule $T_n = n(n + 1) / 2$. En faisant une lecture colonne par colonne, on retrouve la méthode de Gauss.

C'est en utilisant ce genre de barres qu'au 15^e siècle le savant indien Nilakantha Somayaji a trouvé la formule : $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, ou

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2) / 3, \text{ ou encore}$$

$$3(1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)) = n(n+1)(n+2)$$

Pour ce faire, il utilise des plaques de longueur $k + 1$, de largeur k et de hauteur 1, de volume $k(k + 1)$. Une telle plaque représente deux fois le nombre triangulaire T_k . Puis il prend le pavé dont les côtés mesurent n , $n + 1$ et $n + 2$.



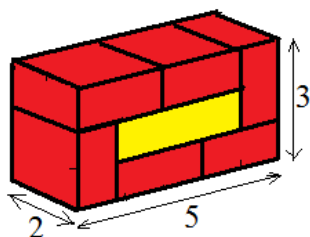
Dans ce pavé, il commence par placer dans le pavé trois plaques $n \times (n+1)$, l'une verticale, et les deux autres posées sur le sol, comme indiqué sur le dessin pour $n = 4$. Cela étant fait, il reste à remplir un pavé de côtés $n - 1$, n et $n + 1$. Il suffit de refaire comme précédemment avec trois plaques $(n - 1) \times n$, pour se retrouver avec un pavé vide de volume $(n - 2)(n - 1)n$. Et ainsi de suite. A la fin du remplissage avec des plaques de plus en plus petites, on arrive à la formule cherchée.

Ce genre de démonstration géométrique est non seulement le premier moyen trouvé historiquement pour trouver certaines formules, et on peut le considérer comme bien plus excitant qu'un raisonnement par récurrence, même si ce sentiment n'est pas partagé par tout le monde. Ainsi dans tous les manuels scolaires de Terminale, la formule du binôme (de Newton) est démontrée par récurrence plutôt que par un raisonnement de combinatoire, autrement plus élégant. De même pour la formule du crible dans les classes préparatoires.

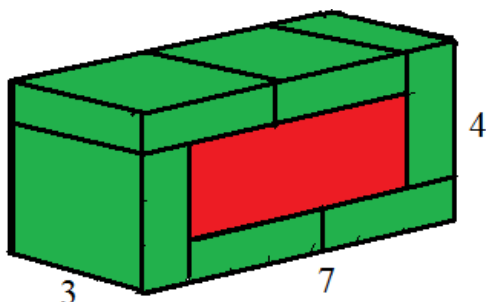
Ce genre de méthode géométrique indienne, qui fut aussi utilisée par les grecs, les arabes et les chinois dans les temps anciens, donne l'idée du puzzle suivant.

On dispose de plaques carrées, toutes de même épaisseur un. Plus précisément, on a six plaques de 1 sur 1 (des cubes) de couleur jaune, six plaques de 2 sur 2 de couleur rouge, six plaques de 3 sur 3 de couleur verte, et six plaques de 4 sur 4 de couleur bleue. En disposant judicieusement ces 60 plaques, construire un pavé rectangulaire sans qu'il n'y ait aucun trou, de façon que l'ensemble des faces n'ait pas plus de deux couleurs présentes. Au cas où vous n'y arrivez pas, on peut vous préciser que ce pavé a pour dimensions $4 \times 5 \times 9$.

On aura intérêt à reconnaître la formule sur la somme des carrés, avec $n(n + 1)(2n + 1)$ pour $n = 4$. Dans ces conditions, commençons par construire un pavé de $1 \times 2 \times 3$ avec les six cubes dont nous disposons, en prenant 1 comme hauteur. Puis enrobons-le au moyen des six plaques de côté 2 comme indiqué sur le dessin.



Tournons ce pavé de façon qu'il ait pour hauteur 2, et enrobons-le en utilisant les six plaques de côté 3. On constate que deux couleurs sont présentes sur les faces du pavé.

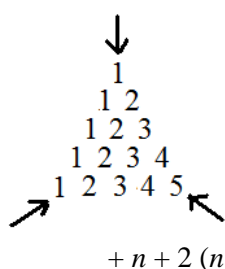


Puis tournons ce pavé afin que sa hauteur soit 3, et enrobons-le comme précédemment avec les six plaques de 4 sur 4. On obtient bien le pavé de côtés $4 \times 5 \times 9$, avec deux couleurs présentes, verte et bleue.

On pourrait d'ailleurs continuer avec des plaques plus grandes, ce qui redémontre la formule sur la somme des carrés $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$

Nouveau rebondissement au sujet de la formule $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, dans les années

1980, grâce au mathématicien canadien d'origine indienne M. Bhargava. A l'âge de 7 ans, il trouve une nouvelle démonstration géométrique de la formule. La somme des nombres $k(k+1)/2$ peut être représentée par des étages de billes qui forment une pyramide à base triangulaire. En haut se trouve une bille, à l'étage au-dessous $3 = 1 + 2 = 2 \times 3 / 2$ billes, puis au-dessous $6 = 1 + 2 + 3 = 3 \times 4 / 2$ billes, etc. Cette somme de nombres triangulaires est d'ailleurs appelée nombre tétraédrique. Il s'agit de prouver que le nombre tétraédrique S_n vaut $n(n+1)(n+2)/6$.



M. Bhargava fait trois lectures de cette somme, selon les trois flèches du dessin. Vu de haut, on obtient, étage par étage : $1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots + n)$. De même en regardant à partir de la gauche. Mais en regardant à partir du côté droit, on a $n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \times 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } 3 S_n &= 1 + 1 \times 2 / 2 + 2 \times 3 / 2 + \dots + n(n+1) / 2 \\ &\quad + 1 + 1 \times 2 / 2 + 2 \times 3 / 2 + \dots + n(n+1) / 2 \\ &\quad + n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \times 1 \end{aligned}$$

Le terme de rang k s'écrit $k(k+1) + k(n-k+1) = k(n+2)$. D'où :

$$3 S_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n)(n+2) = n(n+1)(n+2)/2. \text{ C'est la formule cherchée.}$$