VII- Equations non-linéaires et sections de Poincaré

Si les équations différentielles linéaires à coefficients constants[1] font partie du bagage mathématique de base, il a fallu longtemps pour que les équations non-linéaires sortent de l'ombre. Pourtant l'équation du pendule, $x''+\omega^2 \sin x = 0$, est connue depuis des siècles, mais elle n'a été étudiée que dans le cas de petites oscillations, ce qui redonne une équation linéaire, $x''+\omega^2 x = 0$, en assimilant sin$x$ à x pour x proche de 0.[2] On sait maintenant que la dynamique non-linéaire est présente dans de nombreux phénomènes, et qu'elle donne souvent lieu à des phénomènes chaotiques. Mais en règle générale, et à la différence des équations linéaires, on ne sait pas résoudre théoriquement une équation non-linéaire. Il devient impossible de trouver la formule donnant x en fonction du temps t. Il a fallu trouver une approche théorique plus qualitative que quantitative, reprendre et développer des outils comme la notion d'écoulement dans l'espace de configuration, ou les sections de Poincaré. Enfin l'expérimentation sur ordinateur est le meilleur recours quand la théorie s'avère impuissante.

1. Duffing, Hayashi et Ueda, pionniers des équations non-linéaires

C'est dans les années 1930 que G. Duffing, un ingénieur électricien, introduit une équation différentielle capable de modéliser la dynamique non-linéaire de nombreux systèmes mécaniques ou électriques. Sa forme générale est :

$x'' + k x' + a x + b x^3 = B \cos \omega t$ ou encore $x'' = - k x' - a x - b x^3 + B \cos \omega t$.

La force totale (ou l'accélération x'') se partage en une force d'amortissement $- k x'$, une force de rappel $- a x$ comme celle de la gravité du pendule ou la force élastique d'un ressort, à laquelle s'ajoute une non-linéarité $- b x^3$, ainsi que des oscillations forcées $B \cos \omega t$. On peut considérer qu'il s'agit d'une généralisation de l'équation approchée du pendule, puisque $\sin x \approx x - x^3 / 6$ pour x assez petit.

C'est ensuite au Japon, dans les années 1960-1980, que l'étude de ces équations se développe, au moment où ce pays prend la suprématie mondiale en matière d'électronique. Le professeur C. Hayashi, spécialiste de circuits électriques non linéaires, reprend l'équation de Duffing dans le cas où le coefficient a est nul, afin de modéliser un inducteur non-linéaire. En 1985, il publie un livre réputé à ce sujet[3]. Entretemps, en 1961, un de ses élèves à l'Université de Tokyo, Y. Ueda, tombe sur un signal non périodique lorsqu'il étudie un circuit électrique non linéaire. Il fait un article à ce sujet. Cet article est refusé. Il ne sera publié qu'en 1978. Y. Ueda venait de découvrir la présence d'une

---

[1] On sait parfaitement résoudre les équations linéaires de la forme $x'' + p x' + q = F \cos \Omega t$.

[2] L'équation du pendule $x''+\omega^2 \sin x = 0$ présente le terme non-linéaire sin x. Nous avons aussi rencontré dans le chapitre précédent l'équation de Van der Pol $x'' - k x'(1 - b x^2) + a x = 0$, avec la présence du terme non-linéaire de degré trois $x'x^2$.

[3] *Nonlinear Oscillations in Physical Systems* (*Princeton University Press*).

dynamique chaotique derrière les équations non-linéaires à oscillations forcées. Mais à l'époque, même dans les laboratoires les plus avancés sur les circuits électroniques non-linéaires, la notion de chaos était rejetée comme ne concordant pas avec les théories mathématiques et physiques ambiantes. Il ne pouvait pas s'agir de chaos déterministe, mais de bruit, de friture sur la ligne, de sortes d'interférences provoquées par les imperfections de l'expérience. Il a fallu attendre dix sept ans pour que les travaux de Y. Ueda soient enfin reconnus. Le motif chaotique qu'il avait trouvé est maintenant appelé l'« attracteur japonais » !

Mais commençons par introduire l'outil essentiel, appelé section de Poincaré, en reprenant l' exemple d'un pendule.

2. Le pendule forcé

Considérons le pendule amorti, étudié dans le chapitre précédent, et ajoutons lui des oscillations forcées. L'équation différentielle devient :

$$\theta'' = -k\,\theta' - \sin\theta + B\sin t$$

avec la présence du terme supplémentaire $B \sin t$. L'ajout de vibrations forcées horizontales[4] aux oscillations propres du pendule va conduire à des phénomènes nouveaux, de nature chaotique. C'est ce que nous allons observer en prenant une force d'amplitude B de plus en plus grande.

Rappelons que lorsque l'amplitude B est nulle, les trajectoires finissent toutes par converger vers un point corrrespondant à l'un des minima de la sinusoïde du potentiel, soit $(2\,q\,\pi, 0)$ lorsque l'on se place dans l'espace de configuration (x, v). On en déduit aisément les bassins d'attraction de ces points limites. Il suffit de prendre les points de départ des trajectoires situés dans un carré, puis de voir vers quel point converge la trajectoire, autrement dit vers quelle valeur de q. Chaque point de départ est alors colorié avec une couleur qui est fonction de q (*figure 1*).

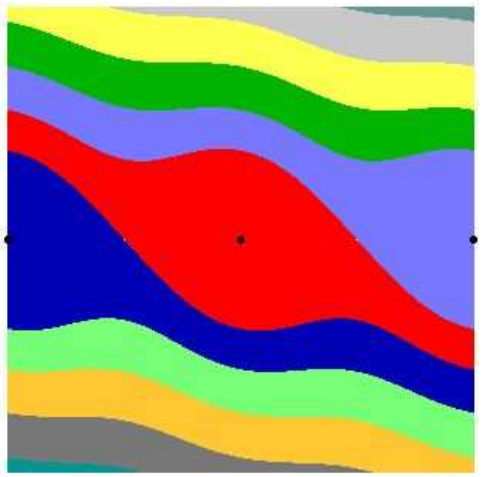


Figure 1 : Bassins d'attraction des points situés dans un carré de longueur 4π, lorsque le coefficient k de la force de frottement vaut 0,2, et qu'aucune force sinusoïdale n'agit.

Lorsque l'amplitude B de la force sinusoîdale n'est plus nulle, tout en restant relativement faible, les trajectoires ne convergent plus vers des points, à savoir les puits du potentiel, mais vers des courbes fermées autour de ces puits, ce qui correspond à des oscillations autour des puits de potentiel. Toutes ces courbes sont les mêmes, car que l'on parte de (x_0, v_0) ou de $(x_0 + 2\,k\,\pi, v_0)$ l'équation différentielle donne la même évolution. De façon plus imagée, la bille qui circule sur la sinusoîde du potentiel se comporte de la même façon, les vibrations la faisant osciller autour d'un des puits du

[4] Il ne s'agit pas ici de vibrations verticales comme celles rencontrées dans un chapitre précédent.

potentiel. Dans ces conditions, on a intérêt à ramener la position x modulo 2π en la contraignant à rester entre $-\pi$ et π. Quand on atteint π et qu'on le dépasse, on enlève 2π pour se retrouver à $-\pi$.

Par exemple pour $B = 1$ (et en gardant $k = 0{,}2$), les trajectoires ramenées modulo 2π convergent toutes vers la même courbe fermée (*figure 2*). Si l'on n'utilisait pas le modulo, on aurait cette même courbe fermée autour de chacun des puits du potentiel, correspondant à $x = \pm 2k\pi$ et $v = 0$. Et si l'on voulait connaître les bassins d'attraction de ces cycles, il suffirait de tester dans quelle zone entre $2\,k\,\pi - \pi$ et $2\,k\,\pi + \pi$ pour x finirait par tomber la trajectoire d'un point. Mais nous verrons qu'une méthode plus élégante est possible, grâce aux sections de Poincaré.

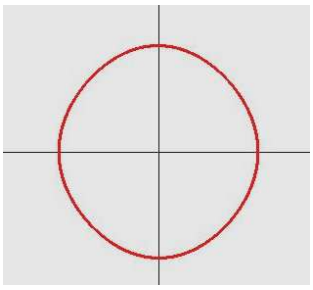


Figure 2 : Cycle limite pour les trajectoires dont l'abscisse x est ramenée modulo 2π, x restant entre $-\pi$ et π.

Lorsque l'amplitude B de la force devient plus forte, la situation se complique, avec l'apparition de plusieurs courbes limites, comme dans l'exemple de la *figure 3*, avec $B = 1{,}66$ et $k = 0{,}2$, où il existe trois courbes différentes vers lesquelles sont attirées toutes les trajectoires. Si l'une est fermée, correspondant à un phénomène périodique, les deux autres indiquent que sous l'effet prépondérant des oscillations forcées les trajectoires s'en vont à l'infini, mais avec la même évolution sur chaque intervalle de longueur 2π. La force d'amortissement ne suffit plus pour maintenir les trajectoires dans une zone finie.

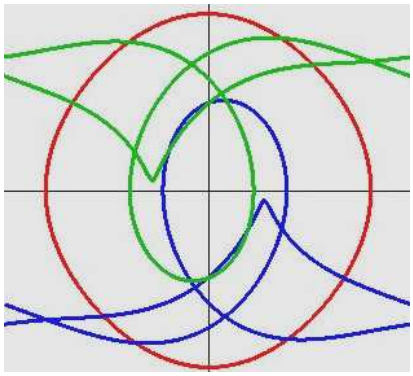


Figure 3 : Les trois cycles limites attracteurs des trajectoires, ramenées modulo 2π. Le cycle *en rouge* indique que les trajectoires correspondantes finissent par osciller autour d'un puits de potentiel. Les deux autres cycles, *en bleu* et *en vert*, montrent que les trajectoires correspondantes s'en vont à l'infini.

La question se pose alors de classer les points de départ des trajectoires selon la courbe limite vers laquelle ils sont attirés. Autrement dit il s'agit de déterminer les trois bassins d'attraction correspondants. Ce n'est plus aussi simple que lorsque les trajectoires convergeaient vers des points. Mais pour cela on va disposer d'un nouvel outil, ce que l'on appelle les sections de Poincaré.

3. Sections de Poincaré

L'idée est simple et lumineuse. Dès que les trajectoires se compliquent et deviennent difficiles à analyser et même à visualiser, on est amené à simplifier le problème en ne s'intéressant qu'à l'intersection des trajectoires avec un plan si l'on est dans l'espace à 3 dimensions, ou une droite si

l'on est en 2 dimensions. Le mouvement continu d'un point qui décrit la trajctoire est remplacé par une succession de points dans un plan de coupe. Ces points sont obtenus chaque fois que la trajectoire traverse le plan. L'analyse locale d'une récurrence sur des points donne une indication sur le comportement global du mouvement. Par exemple si une trajectoire en 2 dimensions converge en s'approchant de plus en plus d'un cycle limite (une courbe fermée), la coupe de la trajectoire par une droite donne une succession de points convergeant vers un cycle fixe de deux points, à savoir les points d'intersection du cycle limite avec la droite de coupe. Cela s'appelle une section de Poincaré. A la fin du 19è siècle, dans son étude sur le problème des trois corps ou planètes, Henri Poincaré fut conduit à pratiquer ce genre de coupe, en restreignant le problème à une dimension inférieure. En matière de traitement de systèmes différentiels, il fut conduit à privilégier des méthodes qualitatives lorsque l'analyse quantitative n'est plus possible. Et si l'étude théorique, même seulement qualitative, demeure impossible à mener, la simulation sur ordinateur peut donner des résultats permettant de mieux comprendre la nature des phénomènes.[5]

En fait ce que nous allons faire ici, ce ne sont pas des sections de Poincaré dans l'espace, mais des sections dans le temps, en profitant de la période T imposée par les oscillations forcées. Par exemple, la force sinusoïdale sin t a une période T égale à 2π. Dans ces conditions, le temps est discrétisé, de T en T, et tout se passe comme si l'on prenait des photos des trajectoires à intervalles réguliers. Lorsqu'un point mobile évolue sur sa trajectoire, on prend des instantanés à chaque instant multiple de T. Cela s'appelle aussi un effet stroboscopique.

Utilisons cette méthode dans l'exemple du pendule forcé précédemment abordé, en conservant un amortissement avec $k = 0{,}2$. On a vu que pour une amplitude relativement faible de la force sinusoïdale, notamment pour $B = 1$, les trajectoires convergent vers des cycles ovales tous identiques et disposés tout autour des puits de potentiel $(2\,k\,\pi, 0)$. On constate alors que la section de Poincaré se réduit à un point unique, toujours placé au même endroit sur chaque cycle (*figure 4*). Cela donne un point dans chaque puits de potentiel. En utilisant la convergence des trajectoires vers l'un de ces points lorsque l'on pratique des flashes à intervalles réguliers de longueur 2π, cela nous permet de tracer les bassins d'attraction correspondant à ces cycles limites.

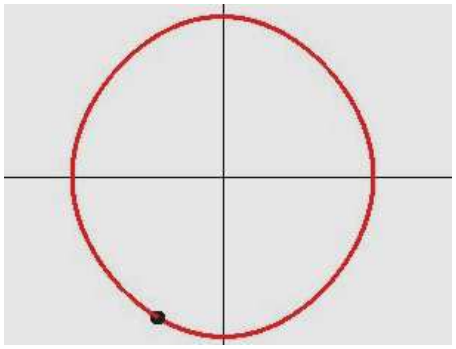


Figure 4 : Cycle limite et point correspondant à la section de Poincaré.

Mais comment faire pour avoir les points de la trajectoire à des instants multiples de 2π, cette période étant celle de la force sinusoïdale sin t ? La méthode consiste à prendre la courbe d'équation $s(t) = \sin(t / 2)$. Celle-ci a pour période 4π mais elle coupe l'axe des t tous les 2π. Il suffit de tester la traversée de l'axe des t par cette courbe, c'est-à-dire le changement de signe de deux valeurs successives de s séparées de dt. Pour avoir la fonction s, mieux vaut constater qu'elle est solution de

[5] Il est aussi possible d'utiliser un appareillage mécanique. C'est ce qu'ont fait des chercheurs de la Daimler Benz Corporation, ainsi que de l'Université de Frankfurt, en Allemagne. Ils ont construit un pendule soumis à une friction mécanique, en y ajoutant des vibrations forcées créées par un moteur électrique agissant sur le pivot du pendule. Le tracé des points obtenus à chaque valeur de la période donne un dessin qui ressemble étroitement à celui obtenu sur ordinateur.

l'équation différentielle $s'' = -(1/4)\, s$ avec $s = 0$ et $s' = 1/2$ pour $t = 0$.[6] Ainsi on traite de façon discrétisée l'équation différentielle avec x et en même temps celle avec s. On obtient le programme suivant, qui aboutit à la *figure 4* :

```
x0=0.;v0[0]=0; v0[1]=0.2; v0[2]=0.4;  /* trois conditions initiales qui vont donner le même résultat */
for(i=0;i<3;i++)
  { t=0.;x=x0; v=v0[i]; dt=0.01; s=0.; vs=0.5;
   for(compteur=0;compteur<25000;compteur++)
    { a=-0.2*v-sin(x)+B*sin(t);  /* accélération. On a pris B = 1 */
      x+=v*dt+0.5*a*dt*dt; if (x>=M_PI) x-=2*M_PI; if (x<=-M_PI) x+=2*M_PI;
      v+=a*dt;
      t+=dt;
     xe=xorig+zoom*x;ye=yorig-zoom*v; /* point de la trajectoire sur l'écran */
     if (xe>0 && xe<800 && ye>0 && ye<600  &&compteur>20000)
        putpixel(xe,ye,red);       /* dessin de la fin de la trajectoire pour avoir le cycle */
     olds=s; as=-0.25*s;  s+=vs*dt+0.5*as*dt*dt;  vs+=as*dt;
     if(s*olds<0. && compteur>20000)
       filldisc(xorig+zoom*x,yorig-zoom*v,4,black); /* point de la section de Poincaré */
    }
  }
```

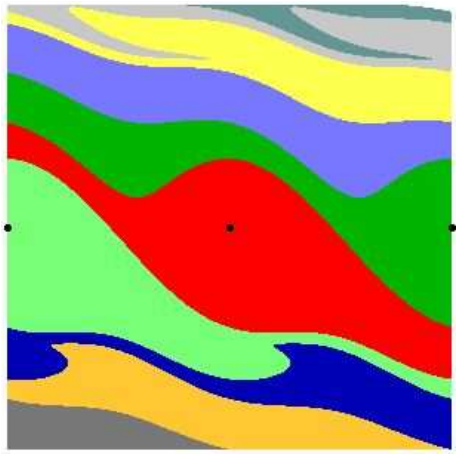
Passons maintenant aux bassins d'attraction des puits de potentiel, espacés les uns des autres de 2π. De $B = 0$ (*figure 1*) à $B = 0{,}5$ (*figure 5 en haut*), leur déformation est faible. Mais elle s'amplifie dès que l'amplitude B de la force dépasse 0,5 et augmente jusqu'à $B = 1.5$. On s'aperrçoit que les bassins se disloquent, s'imbriquent les uns dans les autres, se démultiplient dans des zones feuilletées (*figure 5*).

Pour programmer le tracé des bassins d'attraction, il suffit de connaître les points limites de la section de Poincaré. Par exemple pour $B = 1$, on trouve le point limite $(-0.9, -1.9)$ à $2\, k\, \pi$ près, grâce au programme ci-dessus. Le programme des bassins d'attraction des cycles situés dans chaque puits de potentiel s'ensuit :

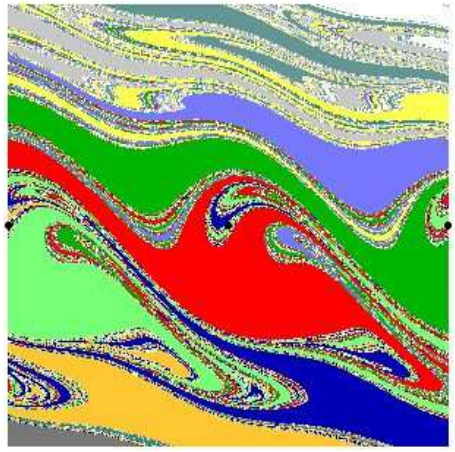
```
Le=300;   /* longueur du carré sur l'écran */
L=4.*M_PI;
zoom=(double)Le/L;  /* zoom correspondant à nne longueur 4π du carré pour les calculs */
dt=0.01;
for(xe=xorig-Le/2;xe<=xorig+Le/2;xe++) for(ye=yorig-Le/2;ye<=yorig+Le/2;ye++) /* parcours du carré */
  { x00=(xe-xorig)/zoom;            /* point initial d'une trajectoire en mode calcul */
    v00=(double)(yorig-ye)/zoom;
    t=0.;x=x00; v=v00;  s=0.; vs=0.5;
    for(compteur=1;compteur<10000;compteur++)  /* trajectoire */
     { a=-0.2*v-sin(x)+sin(t);   x+=v*dt+0.5*a*dt*dt;    v+=a*dt;   t+=dt;
       olds=s; as=-0.25*s;  s+=vs*dt+0.5*as*dt*dt;  vs+=as*dt;
       if(s*olds<0. && compteur>8000)                          /* points de la section de Poincaré */
         { if (fabs(x+0.9)<0.1 && fabs(v+1.9)<0.1)
                {putpixel(xe,ye,red); break;}
           else  if (fabs(x+0.9-2.*M_PI)<0.1 && fabs(v+1.9)<0.1)
                 {putpixel(xe,ye,green); break;}
           else if (fabs(x+0.9+2.*M_PI)<0.1 && fabs(v+1.9)<0.1)
                 {putpixel(xe,ye,green2); break;}

           et de même avec ±4π, ±6π, ±8π, ±10π, avec des coulurs différentes à chaque fois
         }
     }
```

[6] Plus généralement, pour une période T qui n'est pas forcément 2π, on utilise la fonction $s = \sin((\pi / T)\, t)$, qui coupe l'axe des t de T en T. Elle vérifie l'équation différentielle $s'' = (-\pi^2 / T^2)\, s$, avec pour $t = 0$, $s = 0$ et $s' = \pi / T$. Précisons que pour des vibrations forcées de la forme $\cos(\omega\, t)$, la période T est telle que $T = 2\, \pi / \omega$. Les conditions sur la fonction s deviennent $s'' = -(\omega^2 / 4)\, s$ avec pour $t = 0$, $s = 0$ et $s' = \omega / 2$.

}



B = 0,5



B = 1

B=1,4

Figure 5 : Bassins d'attraction des cycles limites dans les puits de potentiel (2 $k\ \pi$, 0) pour trois valeurs de *B*, dans un carré de longueur 4π.

Augmentons les oscillations forcées. Aux alentours de $B = 1{,}555$ un nouveau phénomène apparaît, avec des trajectoires qui partent à l'infini. Nous avons vu précédemment le pendule forcé dont les trajectoires convergeaient vers trois courbes limites pour $B = 1{,}6$, lorsque l'on ramenait x entre $-\pi$ et π. En pratiquant une section de Poincaré, avec des photos des trajectoires à des intervalles de temps 2π, la courbe fermée donne un seul point de convergence, tandis que pour les deux autres, correspondant à des trajectoires infinies, on obtient deux points (*figure 6 à gauche*). Tout cela reflète

la périodicité du phénomène. Maintenant, pour avoir les bassins d'attraction des trois courbes[7], il suffit de les distinguer selon leurs points de convergence dans la section de Poincaré. On obtient le dessin de la *figure 6*, avec les trois bassins en rouge, vert et bleu, tout étant ramené modulo 2π [8]. La complexité de ce dessin reflète celle du comportement du pendule forcé. On notera la nature feuilletée de ces bassins et leur imbrication. Dans certaines zones, un minuscule changement dans les conditions initiales (les points de départ des trajectoires) provoque à long terme un comportement tout à fait différent, puisque la convergence ne se fait plus vers la même courbe limite.

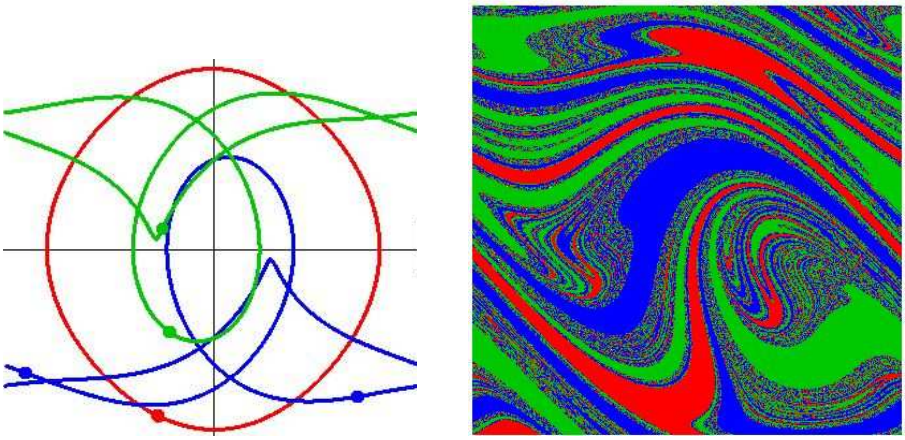


Figure 6 : *A gauche*, les trois courbes limites, chacune avec ses points correspondant à la section de Poincaré. *A droite*, les bassins d'attraction de ces trois courbes.

Nous pouvons encore augmenter l'amplitude des oscillations forcées. Les trajectoires finissent par remplir toute la zone entre $-\pi$ et π. Aucune conclusion ne semble possible. On a l'impression d'un désordre complet, sans savoir si de nombreuses trajectoires ont le même comportement final, ou si chacune a son propre destin. Mais maintenant prenons la section de Poincaré –nos photos chaque fois que le temps augmente de 2π. Les points de chaque trajectoire convergent vers un point limite, et ces points limites forment un motif bien précis, et cela quel que soit le point de départ des trajectoires (*figure 7*). Autrement dit, derrière le désordre intégral des trajectoires se cachent des structures certes complexes, mais ordonnancées et immuables. Sans les sections de Poincaré, on n'en aurait jamais rien su.

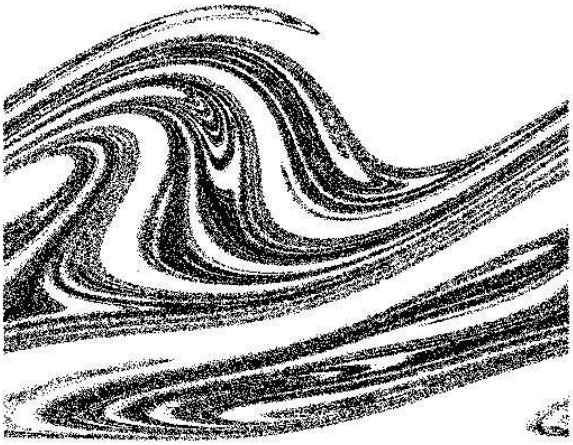


Figure 7 : Points limites d'une section de Poincaré pour $B = 2{,}5$ et $k = 0{,}05$.

[7] A la différence de ce que nous avions fait jusqu'à $B = 1{,}4$, en prenant les bassins d'attraction des puits de potentiel, toutes les trajectoires sont ici confinées sur une longueur 2π, et l'on ne fait la distinction qu'entre les trajectoires qui restent dans un des puits de potentiel, et celles qui s'en vont à l'infini, de deux façons différentes.

[8] Le programme est analogue à celui des bassins d'attraction vu précédemment. Mais dans le cas présent, il convient en plus de ramener x entre $-\pi$ et π.

Ce que nous avons fait pour le pendule, nous allons maintenant le poursuivre avec d'autres types de forces dérivant d'un potentiel. On dispose maintenant des outils permettant de traiter ce genre de problème. Pour reprendre l'analogie du mouvement d'une bille il s'agit de savoir ce qui se passe dans le contexte de la *figure 8*. La bille circule sur la courbe $U(x)$ qui correspond à un potentiel que l'on s'est donné, et cela se passe sur une plateforme mobile subissant des vibrations forcées horizontales. Comment va bouger la bille ?

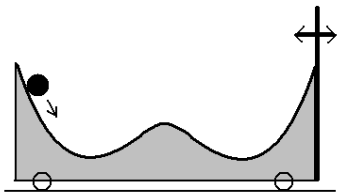


Figure 8 : Bille circulant sur une plateforme qui vibre horizontalement.

4. Equations de Duffing et Ueda

Dans l'équation de Duffing $x'' = -k\,x' - a\,x - b\,x^3 + B \cos \omega\, t$, le fait d'ajouter des oscillations forcées $B \cos \omega\, t$ provoque des perturbations importantes et ajoute des comportements chaotiques qui sont difficiles à analyser. Le traitement de l'équation de Duffing dans le plan x,v va souvent donner des trajectoires qui convergent vers un attracteur ayant l'aspect d'une pelote de laine, dont le fil apparaît complètement emmêlé. Les trajectoires se recoupent elles-mêmes, ce qui était auparavant interdit pour les équations différentielles autonomes, quand la variable temps n'apparaissaait pas explicitement dans l'équation. Mais commençons par traiter l'équation de Duffing autonome, sans ses oscillations forcées, afin de voir le rôle des paramètres a et b.

Exercice 1 : Equation de Duffing simplifiée, sans force périodique

Il s'agit de l'équation autonome, c'est-à-dire sans intervention explicite de la variable temps t, de la forme $x'' + a\,x + b\,x^3 = 0$, où a et b sont les seuls paramètres, le phénomène d'amortissement étant supprimé.

1) *Cette équation s'écrit aussi $x'' = -a\,x - b\,x^3$. La force $-a\,x - b\,x^3$ dérive d'un potentiel U tel que $dU / dx = a\,x + b\,x^3$, soit $U(x) = a\,x^2 / 2 + b\,x^4 / 4$. Dresser le tableau de variations de cette fonction U, en distinguant quatre cas suivant les signes de a et b. Sachant que la courbe représentative de U permet de connaître les trajectoires dans le plan de configuration x, v, faire les dessins correspondants dans chacun de ces cas.*

Il s'agit de connaître le signe de la dérivée de U, soit $U'(x) = a\,x + b\,x^3 = a\,x\,(1 + (b / a)\,x^2)$. Lorsque a et b ont de même signe, la parenthèse reste positive, et la dérivée est du signe de $a\,x$. Si a et b sont tous deux positifs, la dérivée passe du signe moins au signe plus, la courbe de U a la forme d'une cuvette. Si a et b sont négtifs, la dérivée passe de + à – et la courbe a la forme d'une bosse. Par contre, si a et b sont de signe contraire, la parenthèse $1 + (b / a)\,x^2$ admet deux racines $\pm\sqrt{-b / a}$, elle est positive entre les racines et négative ailleurs. Si a est négatif et b positif, la dérivée prend successivement les signes – + – +, la courbe de U présente deux cuvettes séparées par une bosse. Enfin pour a positif et b négatif, la dérivée prend les signes successifs + – + –, la courbe a deux bosses séparées par une cuvette. A partir des quatre formes obtenues on en déduit aisément les trajectoires dans l'espace de configuration x, v.

2) *Programmer pour avoir les trajectoires dans chacun des cas trouvés ci-dessus, et comparer avec les tracés obtenus au 1°. Lorsque a est positif et b négatif, on pourra prendre a =1 et b = –1/6 pour avoir une bonne approximation, lorsque x n'est pas trop grand, de ce qui se passait pour le pendule avec $\theta'' = -\sin \theta$.*

Les trajectoires obtenues par programme (*figure 9*) confirment les résultats obtenus au 1°.

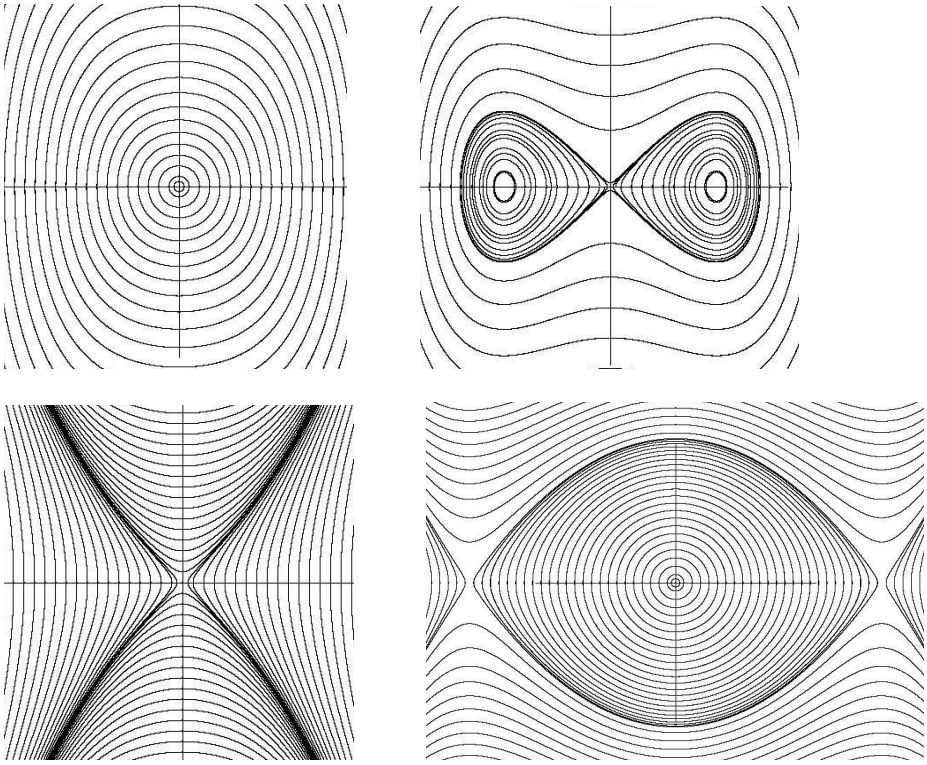


Figure 9 : Les quatre types d'écoulement, avec $a > 0$ et $b > 0$ et $a < 0$ et $b > 0$ *en haut*, et *en bas* avec $a < 0$, $b < 0$, et $a > 0$ et $b < 0$.

3) *Prendre maintenant* $x'' + 0{,}5\, x' + a\, x + b\, x^3 = 0$, *en rajoutant l'amortissement* $0{,}5\, x'$, *et tracer les trajectoires.*

Les résultats sont donnés sur la *figure 10*.

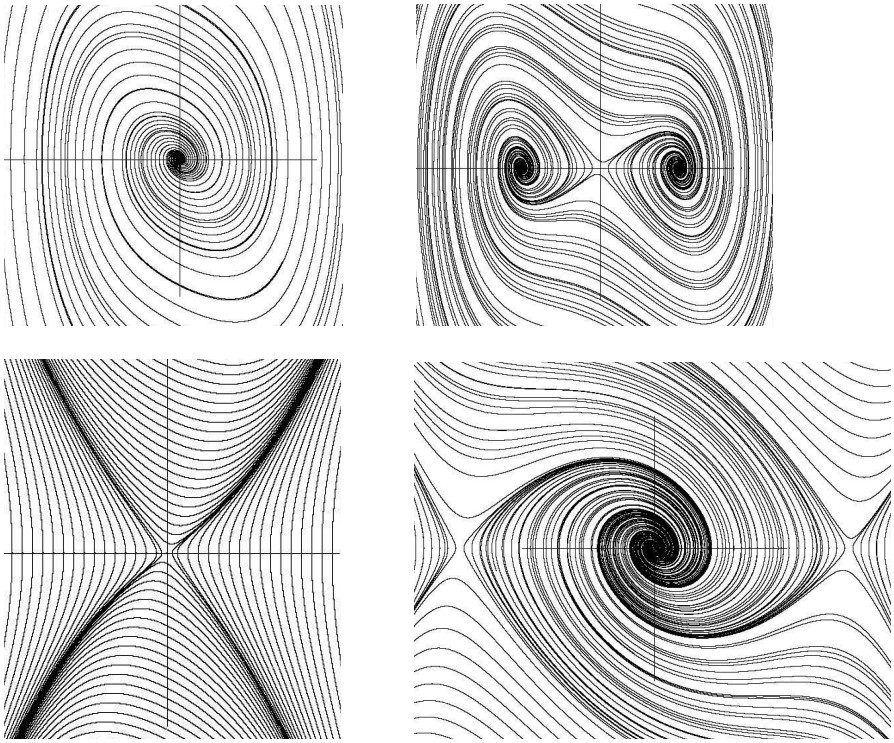
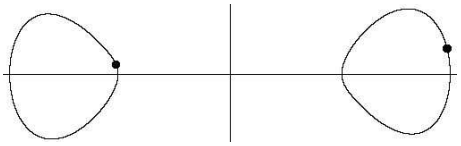


Figure 10 : Ecoulements en présence d'un amortissement.

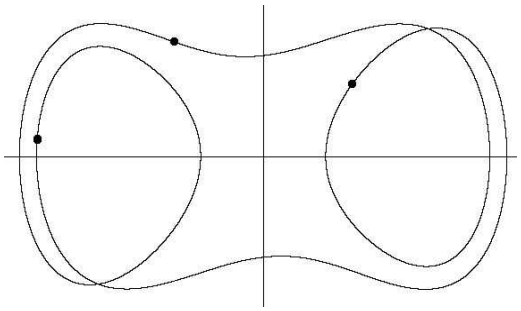
L'exercice précédent montre que les deux cas, $a < 0$ et $b > 0$ d'une part, $a > 0$ et $b > 0$ d'autre part, ont l'avantage d'empêcher les trajectoires de partir à l'infini. Que se passe-t-il lorsque l'on ajoute des vibrations forcées ?

4.1. Premier cas : $a = -1$ et $b = 0{,}1$

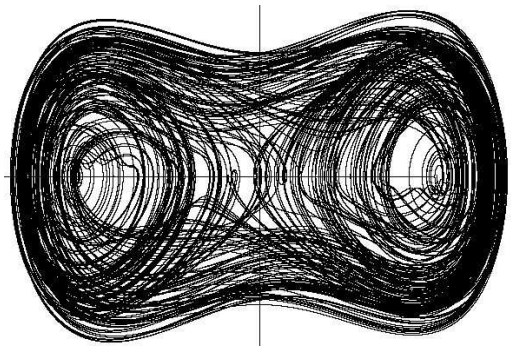
Prenons plus précisément $a = -1$ et $b = 0{,}1$. L'équation s'écrit $x'' + 0{,}2\,x' - x + 0{,}1\,x^3 = B\cos t$. Rappelons que la courbe du potentiel présente deux cuvettes. Pour de faibles valeurs de B, les trajectoires convergent soit vers un ovale soit vers un autre, tous deux centrés autour des puits de potentiel, comme on pouvait s'y attendre (*figure 11*). Pour $B = 0{,}9$, les deux ovales précédents s'unissent en un seul, formant une double boucle. Mais c'est autour de $B = 1$ que tout change. L'attracteur des trajectoires ressemble alors à une bobine de fil emmêlée qui ne cesse de se densifier au fil du temps, tandis que la figure obtenue par section de Poincaré prend une forme immuable avec sa structure fractale feuilletée, ce que l'on appelle un attracteur étrange. Ensuite, pour des valeurs supérieures comme $B = 2$, on trouve un grand ovale. Ce ne sont là que quelques exemples, il arrive aussi que l'on trouve quatre ovales ou des enroulements plus complexes.

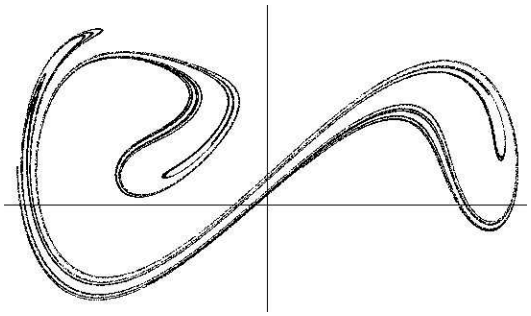


$B = 0{,}8$

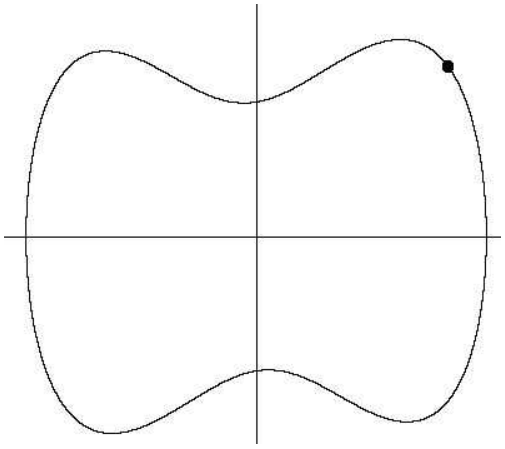


$B = 0{,}9$





$B = 1$



$B = 2$

Figure 11 : Résultats obtenus dans le plan de configuration *x*, *v*, selon l'amplitude des vibrations forcées. Dans le cas où $B = 1$, on a ajouté *à droite* l'attracteur issu de la section de Poincaré.

Le fait d'obtenir un attracteur chaotique en forme de bobine de fil emmêlée, avec une section de Poincaré donnant une forme fractale, avec ses multiples replis et feuilletages, arrive couramment dès que les vibrations forcées ont une amplitude assez grande. On trouvera sur la *figure 12* d'autres résultats obtenus en prenant $a = -1$ et $b = 1$.

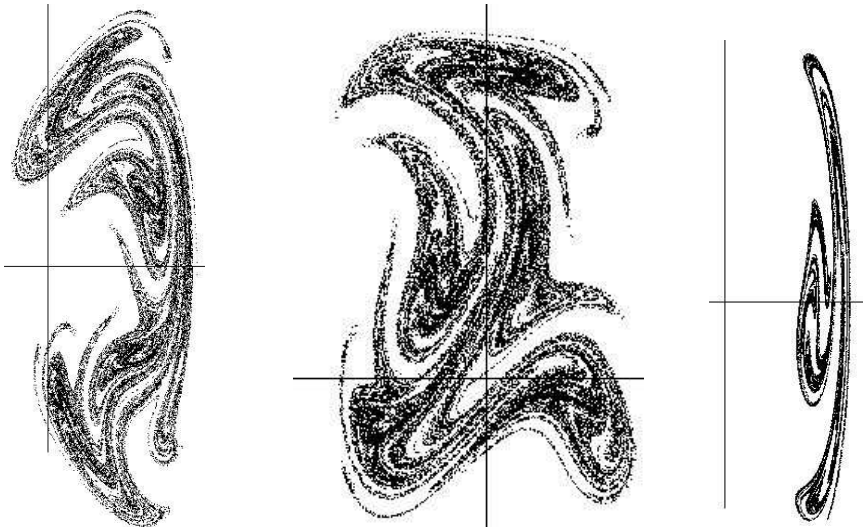


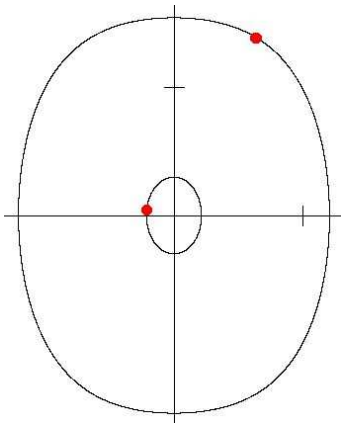
Figure 12 : Attracteurs étranges correspondant à une section de Poincaré des trajectoires, pour $a = -1$ et $b = 1$. *A gauche*, $k = 0{,}02$ et $B = 3$, *au centre* de même mais en prenant 3 sin *t* au lieu de 3 cos *t*, *à droite* pour $k = 0{,}07$ et $B = 11$.

4.2. Deuxième cas : *a* = 1 et *b* = 1

Prenons comme équation différentielle $x'' + 0{,}1\, x' + x + x^3 = 0{,}2 \cos(1{,}4\, t)$. En prenant plusieurs trajectoires dans le plan *x*, *v*, on constate la présence de deux cycles limites, un petit et un grand (*figure 13 en haut*). Pour pouvoir séparer les points qui convergent vers un cycle de ceux qui convergent vers l'autre, on pratique une section de Poincaré. La force périodique cos(1,4 *t*) a pour période $T = 2\pi / 1{,}4$. Hachées dans le temps de *T* en *T*, les trajectoires au mouvement continu sont remplacées par une suite de points, et celle-ci converge vers un point fixe ou un autre selon que l'on tombe sur un cycle ou sur l'autre. Grâce à la connaissance de ces points fixes, on peut déterminer les deux bassins d'attraction des deux cycles, puisque selon son point de départ x_0 ,v_0, une trajectoire converge vers l'un ou l'autre des deux cycles limites, ou encore sa section de Poincaré donne des points qui convergent vers l'un ou l'autre des deux points fixes (*figure 13 en bas*). Le programme correspondant s'écrit :

On se donne les valeurs de a, b, k, B, ω, ainsi que l'origine écran xorig, yorig et le zoom, ici 130.

```
dt=0.005;
for(x0=-1.;x0<0; x0+=0.1) for(vx0=-1.;vx0<1.;vx0+=0.1)  /* trajectoires pour avoir les cycles limites */
    { x=x0; vx=vx0; t=0.;
      for(i=1;i<70000;i++)
        { ax=-k*vx-a*x-b*x*x*x+B*cos(omega*t); x+=vx*dt;vx+=ax*dt;t+=dt;
          xe=400+zoom*x;ye=300-zoom*vx;
          if(xe>0 && xe<800 && ye>0 && ye<600 && i>48000) putpixel(xe,ye,black);
        }
    }
T= 2.*M_PI/omega;
x=0.2; vx=1.;dt=0.0001;t=0.;s=0.;vs=0.5*omega;
for(i=1;i<2000000;i++)  /* section de Poincaré d'une trajectoire menant à un point fixe */
       { ax=-k*vx-a*x-b*x*x*x+B*cos(omega*t); x+=vx*dt;vx+=ax*dt;
         olds=s;as=-omega*omega*s/4.;s+=vs*dt; vs+=as*dt;
         t+=dt;
         xe=400+zoom*x;ye=300-zoom*vx;
         if(olds*s<0. &&  i>1600000) filldisc(xe,ye,5,red);
       }
Recommencer en partant de x = -0.2 et vx = 1, pour avoir l'autre point fixe */
xorig=400;yorig=300;
pf1x=-0.214;pf1y=0.04; pf2x=0.639; pf2y=1.378; /* coordonnées des deux points fixes */
dt=0.005;L=400;zoom=(float)L/6.;
for(xe=xorig-L/2;xe<=xorig+L/2;xe++)  /* tracé des bassins d'attraction */
   { for(ye=yorig-L/2;ye<=yorig+L/2;ye++)
        {x0=(float)(xe-xorig)/zoom; vx0=(float)(yorig-ye)/zoom;
         x=x0; vx=vx0;t=0.;
         for(i=1;i<70000;i++)
           { ax=-k*vx-a*x-b*x*x*x+B*cos(omega*t); x+=vx*dt;vx+=ax*dt;t+=dt;
             if (i > 50000 && fabs(x-pf1x) <0.1 && fabs(vx-pf1y)<0.1)
                { putpixel(xe,ye,red); break;}
            else if ( i > 50000 && fabs(x-pf2x) <0.1 && fabs(vx-pf2y)<0.1)
                { putpixel(xe,ye,green); break;}
             }
         }
      SDL_Flip(screen);
   }
```



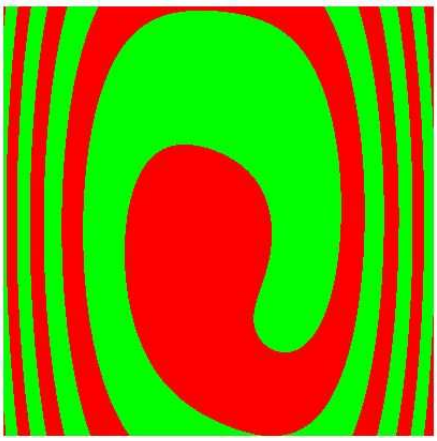


Figure 13 : Les deux cycles limites *en haut*, et leurs bassins d'attraction respectifs *en bas*.

Exercice 2 : Equation x'' + 0,1 x' + x – x³ = B cos t

Il s'agit de l'équation de Duffin dans le cas où a = 1 et b = – 1. On sait que dans ce cas, la courbe du potentiel présente une cuvette entre deux bosses .

1) Prendre B = 0. La forme de la courbe du potentiel indique qu'il existe deux types de trajectoires : celles qui restent confinées dans la cuvette, convergeant même vers le fond O du puits du potentiel sous l'effet de l'amortissement, et celles qui s'en vont à l'infini. Faire le programme donnant les deux bassins d'attraction, celui du point O et celui de l'infini. Pourquoi le bassin de O présente-t-il une symétrie centrale ?

Pour savoir si une trajectoire s'en va à l'infini, il suffit de prendre un grand cercle de centre O et de tester si la trajectoire s'en va au-delà de l'intérieur de ce cercle. On trouve ainsi les deux bassins d'attraction demandés (*figure 14*). On constate la symétrie centrale que présente le bassin d'attraction de *O* autour de ce point. Il s'agit d'une conséquence du fait que la courbe du potentiel est symétrique par rapport à l'axe vertical. En pensant à l'analogie d'une bille circulant sur la courbe du potentiel, si l'on prend les trajectoires des deux points (x_0, v_0) et $(-x_0, -v_0)$ de coordonnées opposées dans le plan de configuration, leurs points conservent des coordonnées opposées (x, v), $(-x, -v)$ au cours de leur mouvement, et si une trajectoire converge vers *O*, l'autre aussi, tout comme si une trajectoire s'en va à l'infini.

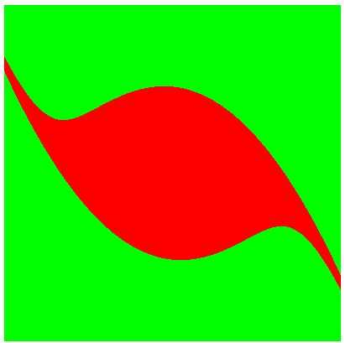


Figure 14 : Bassins d'attraction de *O* en rouge et de l'infini en vert.

2) Rajouter maintenant des vibrations forcées avec B > 0. Tracer les bassins d'attraction des trajectoires restant confinées dans la cuvette, et de celles partant à l'infini, pour quelques valeurs de B. A partir de quelle valeur de B, toutes les trajectoires s'en vont-elles à l'infini ? Pourquoi les bassins d'attraction perdent-ils la symétrie centrale qu'ils avaient pour B = 0 ?

Pour distinguer les deux types de trajectoires, il suffit de les distinguer selon qu'elles s'en vont au-delà d'un grand cercle de centre *O* ou bien qu'elles restent en son intérieur au bout d'un certain nombre d'itérations dans le temps. D'où le programme :

```
dt=0.005; L=400; zoom=(float)L/3.;
for(B=0.;B<0.6;B+=0.1)
  { for(xe=xorig-L/2;xe<=xorig+L/2;xe++)
      { for(ye=yorig-L/2;ye<=yorig+L/2;ye++)
          { x0=(float)(xe-xorig)/zoom; vx0=(float)(yorig-ye)/zoom;
            x=x0; vx=vx0;t=0.;flag=0;
            for(i=1;i<70000;i++)
              { ax=-k*vx-a*x-b*x*x*x+B*cos(omega*t); x+=vx*dt;vx+=ax*dt;t+=dt;
                if (x*x+vx*vx >1000) { putpixel(xe,ye,green); flag=1;break;}
                if (i>50000 && flag==0)  { putpixel(xe,ye,red); break;}
              }
          }
        SDL_Flip(screen);
      }
    SDL_Flip(screen);pause(); SDL_FillRect(screen,0,white);
  }
```

En faisant varier B de 0,1 en 0,1, on constate que le bassin d'attraction des trajectoires restant confinées dans le fini disparaît lorsque B = 0,6 (*figure 15*). Les bassins d'attraction ont perdu la symétrie centrale qu'ils avaient pour B = 0. En effet deux points à coordonnées opposées (x, v) et ($-x$, $-v$) sont soumis à la même force sinusoïdale à chaque instant, et celle-ci tend à les faire bouger du même côté et non pas des deux côtés opposés, ce qui fait perdre la symétrie centrale.

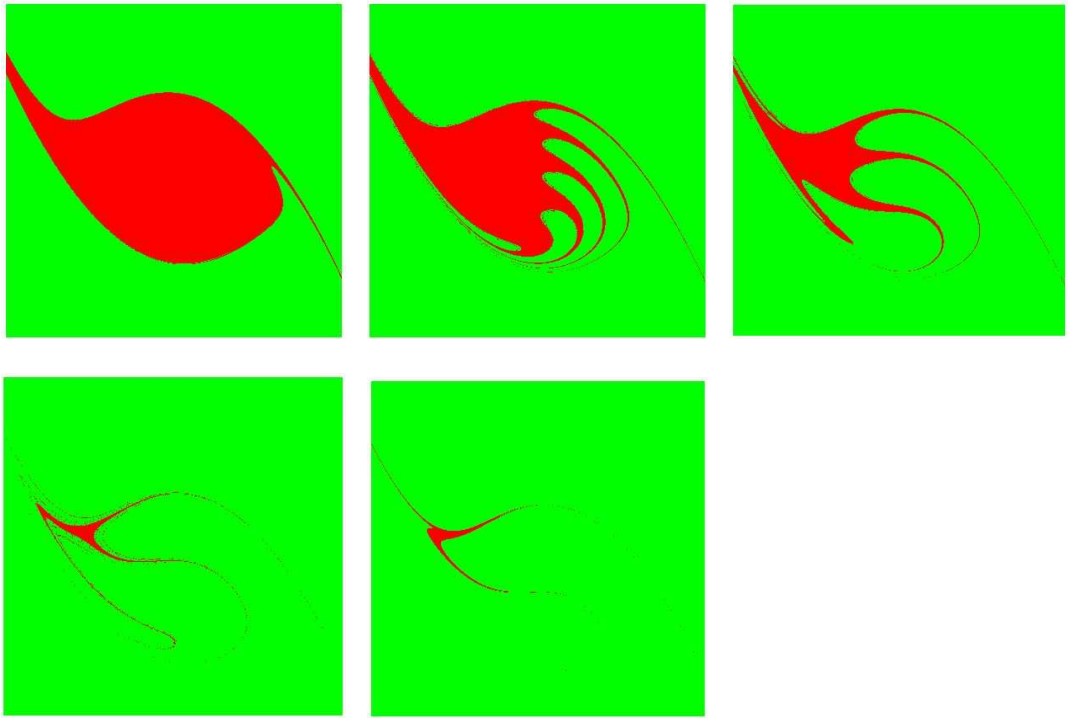


Figure 15 : Bassins d'attraction pour B = 0,1 puis B = 0,2, et ainsi de suite jusqu'à B = 0,5.

3) Pour mieux comprendre la perte de symérie centrale, introduisons une phase φ dans les vibrations forcées en remplaçant B cos t par B cos(t + φ). Comparer les cas où $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$. Prendre aussi quelques valeurs intermédiaires de φ.

On observe que les bassins d'attraction obtenus pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$ sont symétriques par rapport à O (*figure 16*). Cela s'explique puisque cos ($t + \pi$) = – cos t. Ainsi en partant de deux points de coordonnées opposées, tous les signes de départ dans l'équation différentielle sont changés, et de ce fait les trajectoires suivent la même évolution. Deux cas intermédiaires sont donnés sur la *figure 17*.

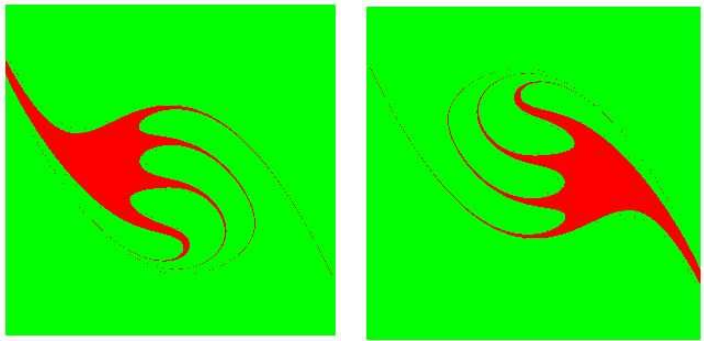


Figure 16 : Bassins d'attraction pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, avec $B = 0{,}25$.

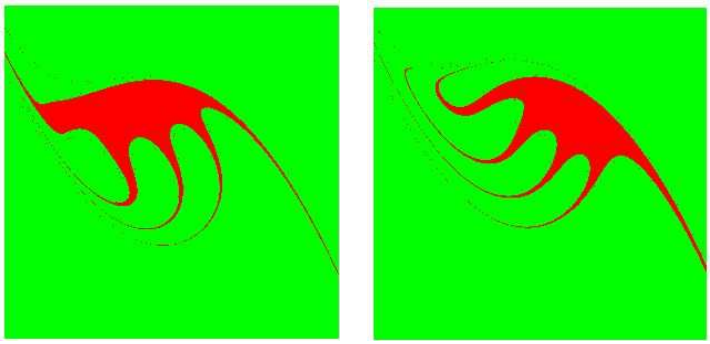


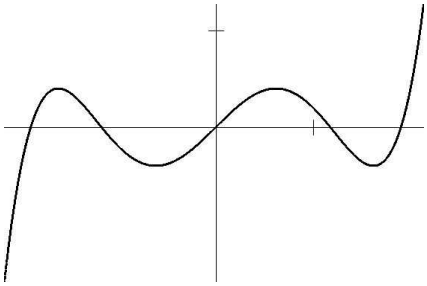
Figure 17 : Bassins d'attraction pour $\varphi = 2\,\pi / 3$ et $\varphi = 4\,\pi / 3$.

Exercice 3 : Potentiel de degré 5

Donnons-nous un potentiel de la forme $U(x) = x^5 / 5 + a\,x^3 /3 + b\,x$. Cette fonction est impaire et l'on fait en sorte que sa courbe représentative présente deux creux et une bosse en choisissant $a = -1$ et $b = 1$. L'équation différentielle associée s'écrit : $x'' + k\,x' + x^4 + a\,x^2 + b = B \cos t$.

1) Tracer par programme la courbe du potentiel et en déduire l'écoulement de l'équation différntielle en l'absence de force sinusoïdale ($B = 0$) mais avec un amortissement $k = 0{,}5$.

Certaines trajectoires s'enroulent en spirale jusqu'au fond de l'un des deux puits attracteurs, qui correspondent aux deux creux de la courbe du potentiel, et d'autres s'en vont a l'infini à gauche. De leur côté, les deux bosses de la courbe du potentiel donnent des points hyperboliques pour les trajectoires (*figure 18*).



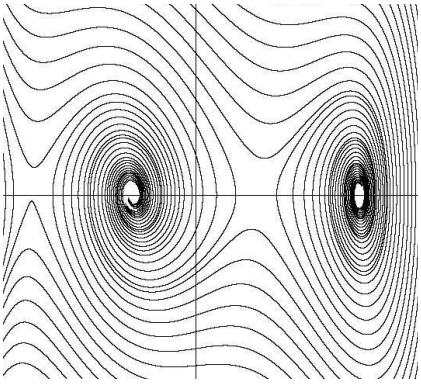


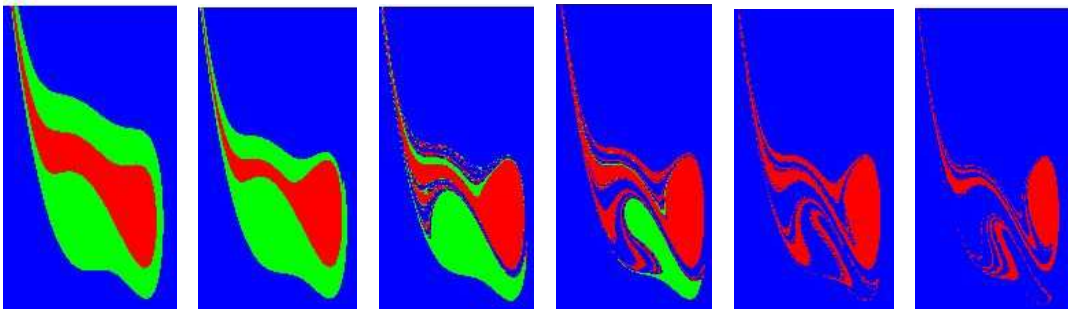
Figure 18 : *En haut*, courbe du potentiel $U(x)$. *En bas*, écoulement de l'équation en présence d'un amortissement, mais sans vibrations forcées.

2) Les trajectoires dans le plan de configuration x, v, ont trois types de comportement : soit elles s'en vont à l'infini, soit elles restent confinées dans le puits gauche, soit dans le puits droit. Tracer par programme les trois bassins d'attraction correspondants, en commençant par prendre B = 0, puis en augmentant B. Que constate-t-on ?

On a déjà vu comment savoir si une trajectoire s'en va à l'infini. Pour tester les trajectoires qui finissent bloquées dans un des deux puits, on n'a pas besoin de prendre une section de Poincaré, il suffit de prendre des zones assez larges autour des puits, et de tester si la trajectoire finit par s'y trouver.

```
B=1.;
xorig=400;yorig=300;
dt=0.005;L=300;zoom=(float)L/15.;
for(xe=xorig-L/2;xe<=xorig+L/2;xe++)
   { for(ye=yorig-L/2;ye<=yorig+L/2;ye++)
        {x0=(float)(xe-xorig)/zoom; vx0=(float)(yorig-ye)/zoom;
         x=x0; vx=vx0;t=0.;
         for(i=1;i<120000;i++)
           { ax=-k*vx-x*x*x*x-a*x*x-b+B*cos(t); x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt;vx+=ax*dt;t+=dt;
             if (i > 100000 && fabs(x-1.5) <0.4 && fabs(vx)<0.1)
                { putpixel(xe,ye,red); break;}
            else if ( i > 100000 && fabs(x+0.7) <0.6 && fabs(vx)<0.1)
                { putpixel(xe,ye,green); break;}
            else if (x*x*+vx*vx>1000) { putpixel(xe,ye,blue); break;}
            }
         }
      SDL_Flip(screen);
   }
```

On observe que le bassin d'attraction du puits gauche a tendance à diminer en surface lorsque l'amplitude B augmente, et qu'il finit par disparaître pour B = 0,8 (*figure 19*). A son tour le bassin d'attraction du puits droit voit sa surface diminuer. Il disparaît à son tour pour B de l'ordre de 1,2. On constate aussi qu'au fil de leur évolution les bassins d'attraction ont une tendance à s'effriter et à se feuilleter, prenant une allure fractale.



$B = 0$ $B = 0{,}5$ $B = 0{,}6$ $B = 0{,}7$ $B = 0{,}8$ $B = 1$

Figure 19 : Les trois bassins d'attraction lorsque *B* augmente. Celui du puits gauche est en vert, celui du puits droit en rouge, et celui de l'infini en bleu.

Exercice 4 : Potentiel de degré six

Avec un potentiel de degré 6, on cnsidère l'équation différentielle :

$$x'' = -k\,x' - x^5 - a\,x^3 - b\,x^2 - c\,x - d + B\cos(\omega t)$$

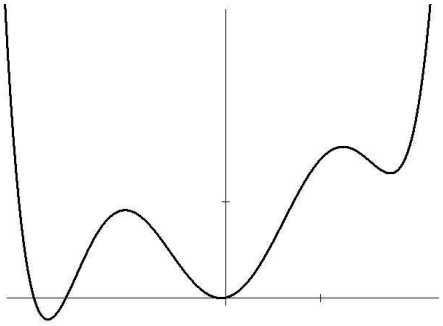
où x'' est l'accélération, – k x' la force de frottement, $-x^5 - a\,x^3 - b\,x^2 - c\,x - d$ *la force dérivant du potentiel de degré six, et B cos(ω t) la force sinusoïdale. Le potentiel est de la forme :*

$$U(x) = \frac{x^6}{6} + a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + d\,x$$

Pour certaines valeurs des paramètres a, b, c, d, sa courbe représentative présente 3 creux et 2 bosses.

1) Prendre a = – 4,6 b = 0,2 c = 4,3 et d = 0,2. Ttracer la courbe de U(x) et vérifier qu'il y a bien trois puits de potentiel et deux bosses donnant des points hyperboliques.Puis visualiser l'écoulement de l'équation différentielle, c'est-à-dire les trajectoires dans le plan de configuration (x, x') en l'absence de force de frottement et de force sinusoïdale (k = 0 et B = 0).

La courbe se présente bien comme annoncé (*figure 20 en haut*). Et en l'absence de frottement et de force sinusoïdale, les trajectoires dans le plan de configuration correspondent bien à ce que serait le mouvement d'une bille roulant sur la courbe du potentiel (*figure 20 en bas*). On constate en effet que certaines trajectoires tournent autour de chacun des trois points elliptiques correspondant aux trois creux de la courbe du potentiel, les deux bosses de la courbe du potentiel donnant des points hyperboliques, tandis que d'autres trajectoires oscillent tout autour du groupe des trois puits, correspondant à de grandes oscillations.



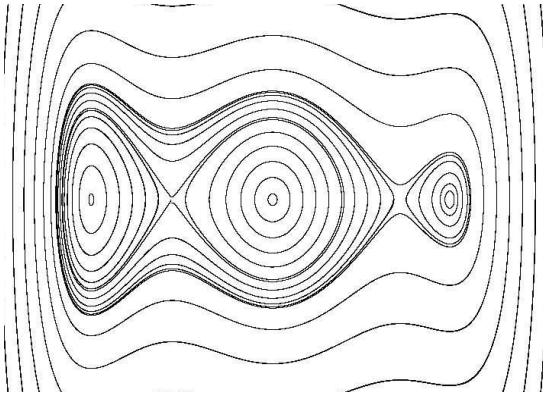


Figure 20 : *En haut*, courbe représentative de $U(x)$. *En bas*, écoulement dans le plan (x, x') associé à l'équation sans frottement ni force sinusoïdale.

2) Ajouter une force de frottement. Que se passe-il ?

Maintenant toutes les trajectoires s'enroulent en spirale autour des trois différents attracteurs en convergeant vers l'un de ces trois points. Par exemple pour k = 0,8 on obtient l'écoulement de la *figure 21*.

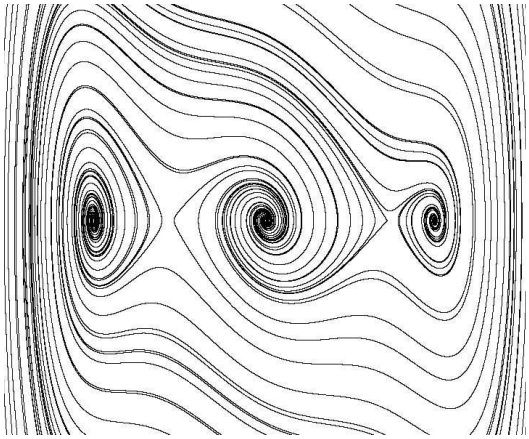


Figure 21 : Ecoulement en présence d'un amortissement.

3) Rajouter une force sinusoïdale, par exemple $B = 2$ et $\omega = 2$, en conservant $k = 0,8$. En prenant un exemple de trajectoire constater que celle-ci ne converge plus vers un point mais vers un cycle limite.

Il est normal que les trajectoires ne convergent vers des points fixes que dans le cas où il y a frottement mais pas de force sinusoïdale. Dès que cette dernière agit, même avec une amplitude B faible, les points fixes sont remplacés par de petits ovales autour des puits de potentiel dans l'espace de configuration, ce qui correspond à de petites oscillations. Pour des amplitudes B plus élevées, les cycles prennent des allures plus complexes, comme par exemple sur la *figure 22* pour $B = 2$ et $\omega = 2$.

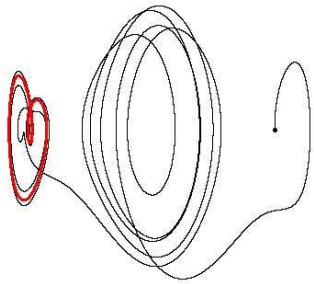


Figure 22 : Une trajectoire convergeant vers un cycle limite.

4) Nous allons maintenant étudier les bassins d'attraction.

a) Commencer avec juste un frottement sans force sinusoïdale. Les trajectoires convergent vers l'un des trois points attracteurs qui correspondent aux vallées du potentiel. Faire le programme visualisant les trois bassins d'attraction pour k = 0,2, B = 0, ω = 1 .

Il suffit de parcouir un carré de l'écran, de convertir les coordonnées des points sur l'écran en coordonnées des points pour le calcul, puis de prendre la trajectoire de chacun de ces points pour voir vers quel point fixe elle converge. Les trois points fixes, qui correspondent aux mimima de la courbe du potentiel, ont pour coordonnées (– 0,05, 0), (1,74, 0), (–1,88, 0). Le résultat est donné sur la *figure 23*.

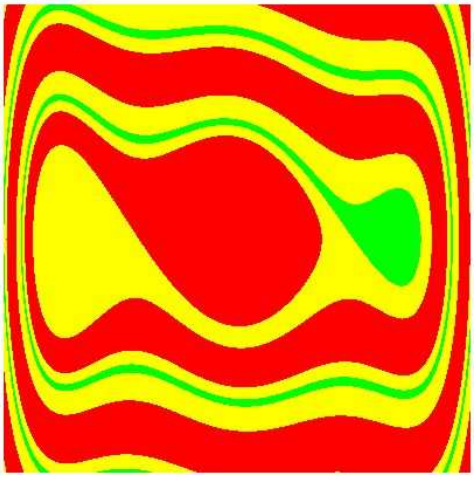


Figure 23 : Les trois bassins d'attraction en présence d'un frottement mais sans force sinusoïdale (B = 0).

b) Ajouter une force sinusoïdale en conservant k = 0,2 et ω = 1, et en prenant B = 0,4 puis 0,5 puis 1. Dans chacun de ces trois cas, déterminer les cycles limites et leurs sections de Poincaré, de façon à pouvoir dessiner leurs bassins d''attraction.

On constate que pour B = 0,4 et B = 0,5, il existe quatre types de cycles limites pour les trajectoires, soit trois petits cercles autour des puits du potentiel, mais aussi un grand cycle autour de deux des puits pour B = 0,4 et autour des trois puits pour B = 0,5. Les sections de Poincaré donnent quatre points fixes, un pour chaque type d'attracteur, et les bassins d'attraction commencent à prendre une allure fractale dans certaines zones (*figure 24 en haut et au centre*).

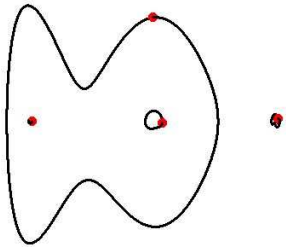
Pour B = 1, le cycle autour d'un des trois puits de potentiel disparaît, il reste trois cycles limites, deux autour de deux points fixes restants, et tout autour un cycle enroulé deux fois sur lui-même, avec deux sections de Poincaré (*figure 24 en bas*).

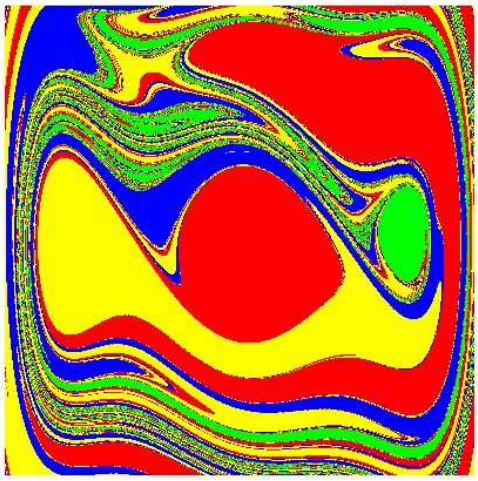
Il s'agit là de trois exemples. En prenant d'autres valeurs de B, on assiste à de nombreux phénomènes complexes.

Les programmes correspondants commencent par trouver les cycles et leurs sections de Poincaré, pour pouvoir ensuite avoir des bassins d'attraction. Par exemple dans le cas où B = 1, on trouve comme sections de Poincaré des 3 cycles les points (0,35, 0) pour le premier, (– 1,84, 0) pour le deuxième, et les deux points (1, 0,6) (2,05 1,35) pour le troisième cycle. A partir de là le programme suivant permet d'avoir les bassins d'attraction :

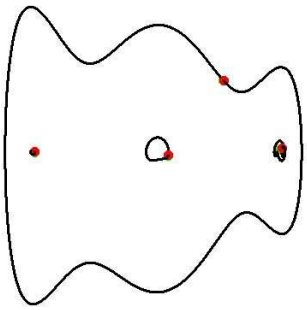
```
xorig=400; yorig=300;
Le=400;
zoom=(double)Le/5.;
zoomv=(double)Le/8.;
```

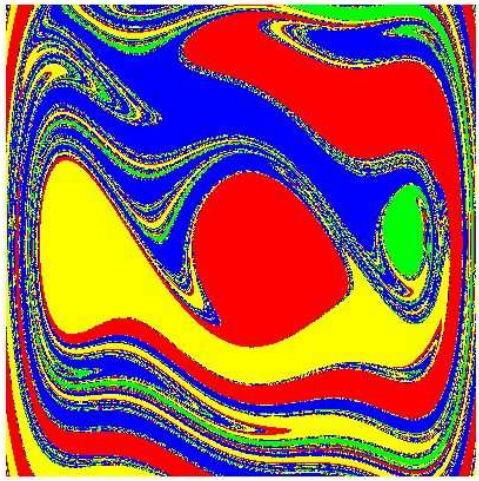
```
dt=0.002;
for(xe=xorig-Le/2;xe<xorig+Le/2;xe++) for(ye=yorig-Le/2;ye<yorig+Le/2;ye++)
  { x00=(double)(xe-xorig)/zoom; vx00=(double)(yorig-ye)/zoomv;
    t=0.;x=x00; vx=vx00;  s=0.; vs=0.5;
    for(compteur=0;compteur<200000;compteur++)
        {  ax=-k*vx-pow(x,5.) -a*x*x*x-b*x*x-c*x-d+B*cos(omega*t);;
           x+=vx*dt+0.5*ax*dt*dt; vx+=ax*dt;
           olds=s; as=-0.25*s;  s+=vs*dt+0.5*as*dt*dt;  vs+=as*dt;
           if(s*olds<0.)
                  { if (fabs(x-0.35)<0.1 && fabs(vx)<0.1) {putpixel(xe,ye,red); break;}
                    else if (fabs(x+1.84)<0.1 && fabs(vx)<0.1) {putpixel(xe,ye,yellow); break;}
                    else if ((fabs(x-1.)<0.1 && fabs(vx-0.6)<0.1)
                            || (fabs(x-2.05)<0.1 && fabs(vx-1.35)<0.1))
                        {putpixel(xe,ye,blue); break;}
                  }
            t+=dt;
        }
    SDL_Flip(screen);
  }
```



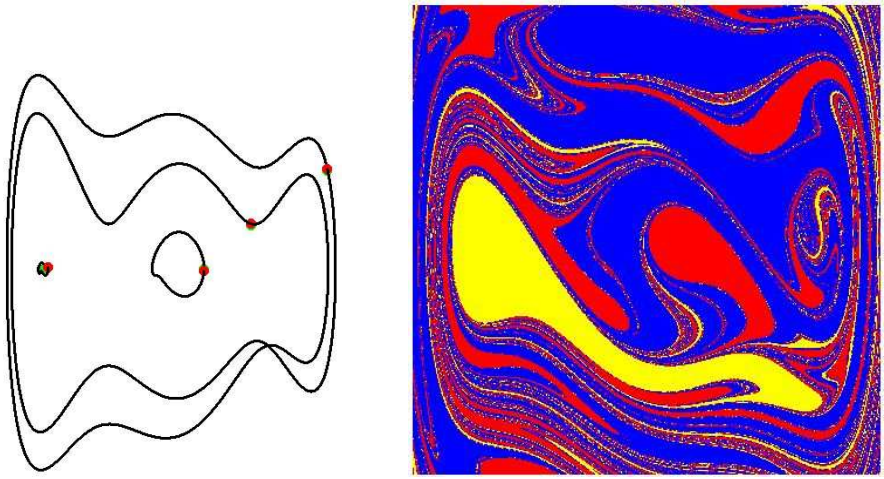


B = 0,4





B = 0,5



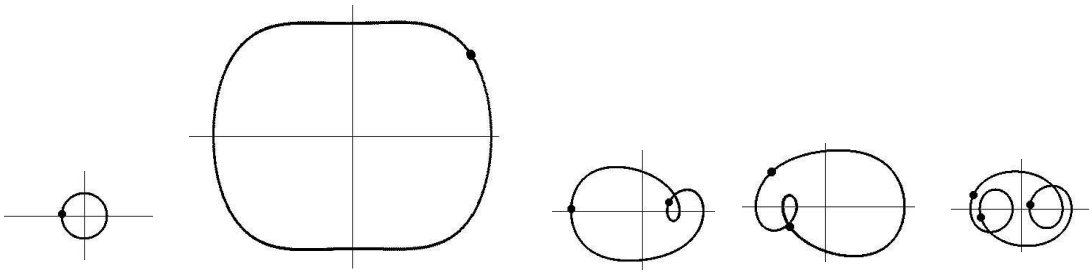
$B = 1$

Figure 24 : Les cycles limites avec leurs sections de Poincaré *à gauche* (points rouges), et les bassins d'attraction correspondants *à droite*.

4.3. Equation de Ueda

Il s'agit d'un cas simplifié de l'équation de Duffing, obtenu en prenant $a = 0$ et $b = 1$. L'équation est de la forme : $x'' + kx' + x^3 = B \cos t$. Le potentiel correspondant est $U(x) = x^4 / 4$ et sa courbe représentative a une forme de cuvette. Malgré cette simplicité, on assiste à une grande variété de phénomènes.

Un cas classique et curieux consiste à prendre $k = 0{,}08$ et $B = 0{,}2$. Suivant les points de départ x_0, v_0, les trajectoires issues de ces points convergent vers cinq cycles limites. En déterminant ensuite la section de Poincaré dans chacun de ces cinq cas, on est en mesure de visualiser les cinq bassins d'attraction correspondants (*figure 25*).



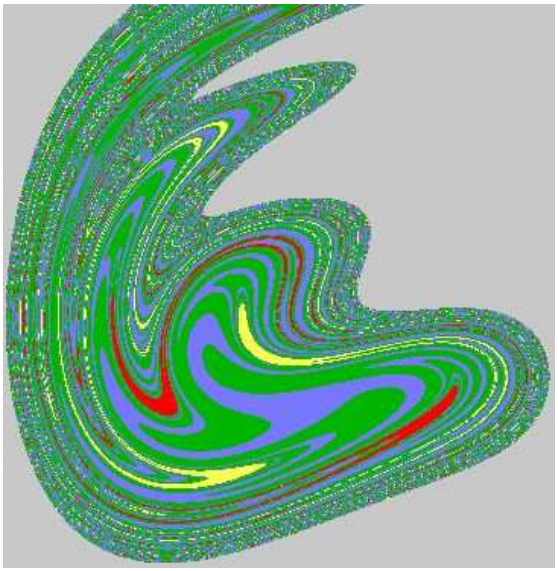


Figure 25 : *En haut* les cinq cycles limites avec les points de la section de Poincaré, *en bas* les cinq bassins d'attraction.

Exercice 5 : Equation de Ueda avec deux cycles limites

Prenons l'équation de Ueda telle que $x'' + 0{,}2\, x' + x^3 = B \cos t$

1) Vérifier que ses trajectoires convergent vers deux cycles limites, pour B = 4 et B = 5. Faire le programme permettant d'avoir les points limites de la section de Poincaré pour chacun des cycles, et en déduire les deux bassins d'attraction de ces deux cycles.

Le résultats sont donnés sur la *figure 26*.

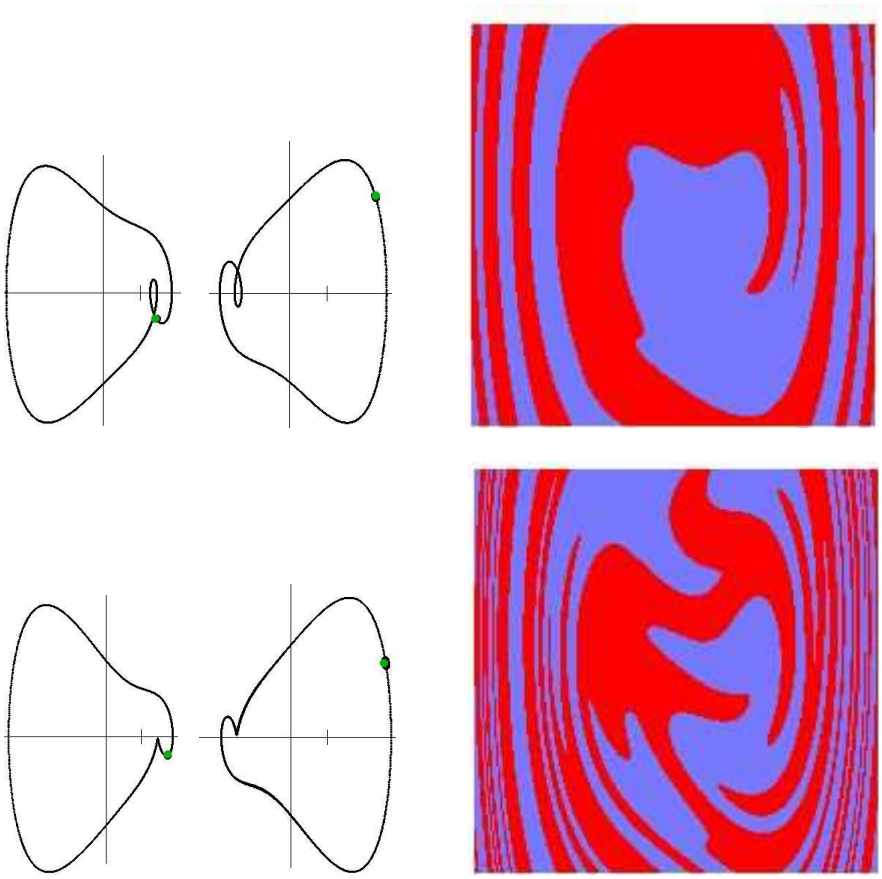


Figure 26 : Cycles limites et bassins d'attraction pour $B = 4$ en haut, et $B = 5$ en bas.

2) Constater que pour B = 7 on trouve un attracteur chaotique en forme de bobine emmêlée. Faire le programme donnant les points limites de la section de Poincaré.

On trouve encore une forme fractale feuilletée (*figure 27*).

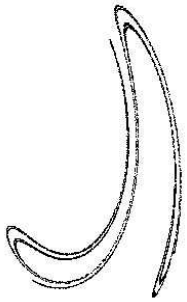


Figure 27 : Points limtes d'une section de Poincaré.