

# Cercles d'Apollonius, et Descartes

## 1. Configuration de cercles tangents

On doit à Apollonius de Perge<sup>1</sup> (vers -200) cette propriété : A partir de trois cercles tangents mutuellement, il existe exactement deux cercles qui leur sont tangents.

La démonstration se fait de nos jours en utilisant une inversion<sup>2</sup> dont le centre  $O$  est un point de contact entre deux des cercles. Ces deux cercles sont transformés en deux droites parallèles  $D$  et  $D'$ , et le troisième cercle devient un cercle  $C$  tangent à ces deux droites, puisque l'inversion conserve les contacts. Sur la figure obtenue, on peut alors construire exactement deux nouveaux cercles tangents à  $C$ ,  $D$  et  $D'$ . La même inversion permet de revenir à la figure initiale, ce qui donne deux cercles tangents aux trois cercles. Tout cela se constate sur la *figure 1* où l'on a pris trois cercles tangents deux à deux extérieurement. Remarquons que dans les deux configurations obtenues en adjoignant le quatrième cercle, on a toujours trois cercles tangents extérieurement et un cercle tangent intérieurement (englobant les trois autres).

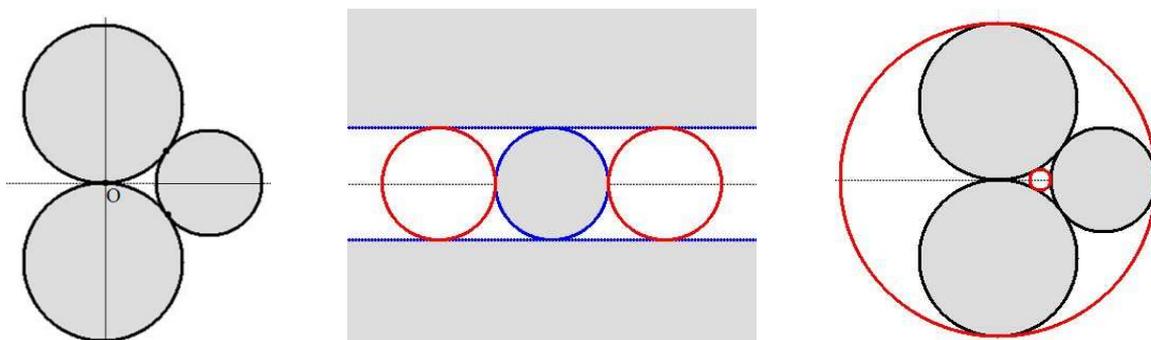


Figure 1 : A gauche, trois cercles mutuellement tangents. Au centre, les cercles (en bleu) après inversion, et les deux nouveaux cercles (en rouge) qui leur sont tangents. A droite, les trois cercles initiaux et les deux cercles tangents en rouge.

### Exercice 1 : Construction d'une configuration de trois cercles tangents

On se donne deux cercles tangents  $C_0$  et  $C_1$ , de rayons  $r_0$  et  $r_1$ . Sans perte de généralité, on prend leur point de contact en  $O$  et leurs centres sur  $Oy$ , avec  $C_0$  au-dessus de  $Ox$  centré en  $(0, r_0)$  et  $C_1$  en dessous centré en  $(0, -r_1)$ , avec  $r_0 < r_1$ . En utilisant une inversion dont le cercle a pour centre  $O$  et pour rayon  $2r_0$ , construire un cercle  $C_2$  qui leur est tangent extérieurement et du côté des  $x$  positifs, puis les deux cercles  $C_3$  qui leur sont tangents.

Il suffit d'appliquer la méthode précédente, et l'on obtient la *figure 2*. On commence par tracer les deux cercles  $C_0$  et  $C_1$ . L'inversion dont le cercle est dessiné en vert donne les droites  $C'_0$  et  $C'_1$ , avec  $C'_0$  tangente à  $C_0$  au point  $(0, 2r_0)$ . On choisit ensuite un cercle  $C'_2$  situé entre ces deux droites, et son inverse donne le cercle  $C_2$ . Puis on trace les deux cercles situés entre les droites  $C'_0$  et  $C'_1$ , et tangents à droite et à gauche de  $C'_2$ . Leurs inverses donnent les deux cercles tangents à  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

<sup>1</sup> La ville de Perge (Perga) est située en Anatolie, dans la Turquie d'aujourd'hui.

<sup>2</sup> On peut aussi utiliser une transformation de Möbius faisant passer du point  $O$  au point  $\infty$ .

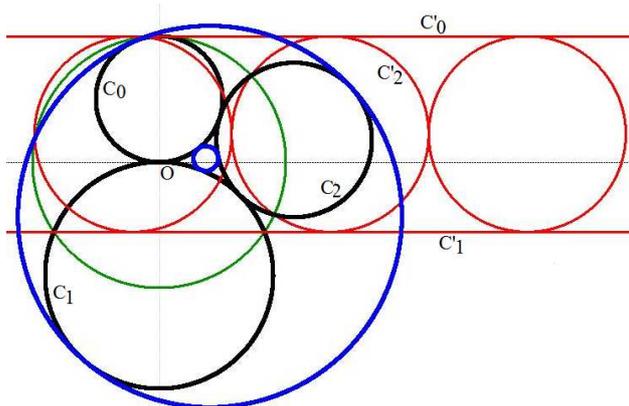


Figure 2 : Les trois cercles  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  en noir, et les deux cercles qui leur sont tangents en bleu.

2) Le cercle  $C_2$  étant choisi du côté des  $x$  positifs, il en est de même de son inverse  $C'_2$ , dont le centre est  $(x'_2, y'_2)$ . Calculer le rayon  $r'_2$  de ce cercle ainsi que  $y'_2$ . Pour quelle valeur de  $x'_2$  le cercle  $C_2$  devient-il une droite qui est la tangente commune aux cercles  $C_0$  et  $C_1$ . En déduire la contrainte sur  $x'_2$  pour que le cercle  $C_2$  soit tangent extérieurement à  $C_0$  et  $C_1$ .

La droite  $C'_0$  inverse de  $C_0$  a pour équation  $y = 2r_0$ . La droite  $C'_1$  inverse de  $C_1$  a pour équation  $y = -(2r_0)^2 / (2r_1) = -2r_0^2 / r_1$ . La distance entre les deux droites  $C'_0$  et  $C'_1$  est égale à

$2r_0 + 2r_0^2 / r_1 = 2r_0(r_1 + r_0) / r_1$  et le rayon de  $C'_2$  vaut  $r'_2 = r_0(r_0 + r_1) / r_1$ . Son centre est équidistant des deux droites, d'où  $y'_2 = (1/2)(2r_0 - 2r_0^2 / r_1) = r_0(r_1 - r_0) / r_1$ .

Le cercle  $C_2$  devient une droite lorsque le cercle  $C'_2$  qui est son inverse passe par  $O$ . Cela signifie que la distance entre  $O$  et le centre de  $C'_2$  est égale au rayon, soit

$$x'^2_2 + y'^2_2 = r'^2_2$$

$$x'^2_2 + r_0^2(r_1 - r_0)^2 / r_1^2 = r_0^2(r_0 + r_1)^2 / r_1^2$$

$$x'^2_2 = 4r_0^3 / r_1$$

$$x'_2 = 2r_0\sqrt{r_0 / r_1}$$

Lorsque  $x'_2$  augmente au-delà de cette valeur, les cercles  $C'_2$  et  $C_2$  se déplacent vers la droite, et  $C_2$  est tangent extérieurement à  $C_0$  et  $C_1$ . Par contre lorsque  $x'_2$  diminue en deçà, le point  $O$  est intérieur aux cercles  $C'_2$  et  $C_2$ , et le cercle  $C_2$  est tangent intérieurement avec  $C_0$  et  $C_1$ . On doit donc avoir

$x'_2 > 2r_0\sqrt{r_0 / r_1}$ . La figure 3 montre l'évolution des cercles  $C'_2$  et  $C_2$  lorsque  $x'_2$  augmente.

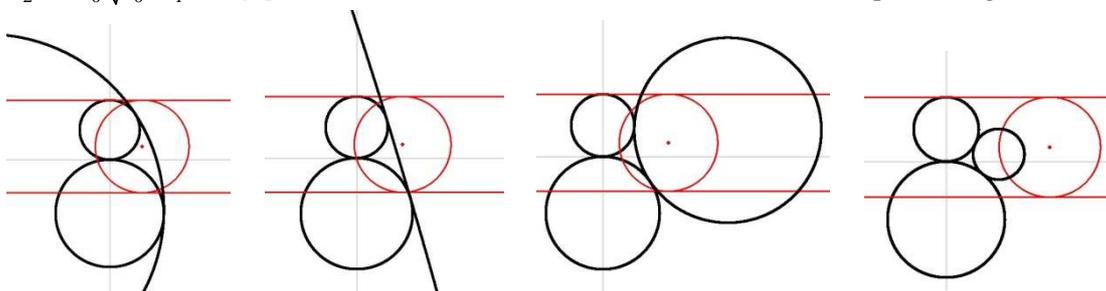
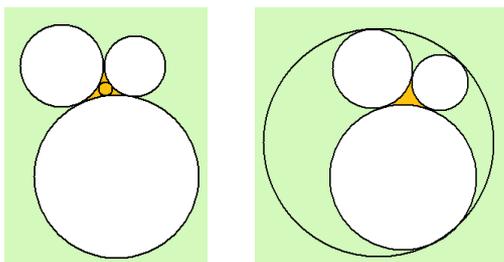


Figure 3 : Evolution des cercles  $C'_2$  (en rouge) et  $C_2$  en noir lorsque  $x'_2$  augmente, avec  $x'_2 < 2r_0\sqrt{r_0 / r_1}$  à gauche, puis  $x'_2 = 2r_0\sqrt{r_0 / r_1}$ , puis sur les deux derniers dessins  $x'_2 > 2r_0\sqrt{r_0 / r_1}$ .

## 2. Empilement des cercles d'Apollonius



Reprenons notre configuration des trois cercles tangents. L'extérieur des trois cercles se divise en deux zones (*jaune* et *verte* sur la *figure ci-contre*) : un triangle curviligne situé entre les trois cercles, et dont les sommets sont les trois points de tangence, ainsi qu'un autre triangle curviligne, cette fois d'aire infinie, et ayant aussi pour sommets les points de tangence. On retrouve ces deux triangles, chacun

avec un sommet à l'infini, sur la figure inversée (il s'agit des zones en blanc de la *figure 1*). C'est là que vont se placer les deux nouveaux cercles. Chacun d'eux donne naissance à trois nouveaux triangles, et l'on peut à nouveau placer un cercle tangent dans chacun de ces triangles. Le processus peut être répété indéfiniment, en mettant un nouveau cercle dans chacun des nouveaux triangles, et chacun donne à son tour trois triangles à l'étape suivante. La multiplication des cercles donne finalement la configuration dite d'empilements de cercles d'Apollonius (*figure 4*), chacun ayant trois points de contact avec ses voisins, et tous insérés dans le cercle tangent englobant les trois cercles initiaux.

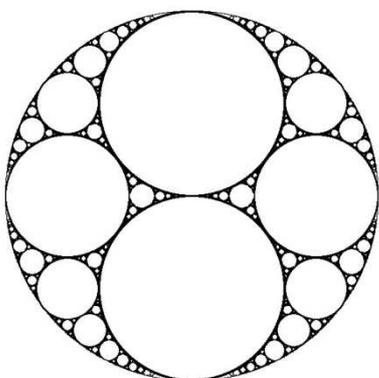


Figure 4 : Empilement de cercles d'Apollonius.

### 2.1. Nombre de cercles

On peut déterminer le nombre de cercles à chaque étape du processus. Appelons  $v_n$  le nombre de nouveaux cercles créés à l'étape  $n$  (avec  $n = 0$  au départ). A l'étape 1, on a deux nouveaux cercles, soit  $v_1 = 2$ . A l'étape  $n$ , les  $v_n$  nouveaux cercles créent chacun trois triangles dans lesquels vont s'insérer les nouveaux cercles de l'étape suivante, soit  $v_{n+1} = 3 v_n$ . D'où la forme explicite  $v_n = 2 \times 3^{n-1}$ . Appelons  $u_n$  le nombre de cercles à l'étape  $n$ , soit  $u_n = u_{n-1} + v_n = u_{n-1} + 2 \times 3^{n-1}$ , avec  $u_0 = 3$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 1) = 3 + 3^n - 1 \\ &= 3^n + 2 \end{aligned}$$

### 2.2. Configuration de quatre cercles

Il existe une autre méthode pour construire ces empilements de cercles. On commence par ajouter aux trois cercles mutuellement tangents (et extérieurs) un quatrième cercle, celui qui leur est tangent avec les trois cercles en son intérieur. Notons ces cercles 0, 1, 2, 3 (*figure 3*). On obtient alors quatre triangles curvilignes qu'il va s'agir de remplir. Pour cela on construit quatre cercles passant par trois des points de tangence associés à trois cercles, soit 012, 013, 023, 123 (*en rouge* sur la *figure 3*), et l'on pratique des inversions par rapport à ces cercles. Prenons par exemple le cercle 013 orthogonal aux trois cercles 0, 1 et 3. Sous l'effet de l'inversion ces trois cercles sont conservés, et le quatrième cercle 2 est transformé en un cercle 2' orthogonal aux trois autres, ce qui donne un cercle d'Apollonius. Les quatre inversions donnent ainsi quatre nouveaux cercles (*en rouge* sur la *figure 3*). Puis on recommence. Sous l'effet d'une des inversions, seuls trois des quatre cercles *rouges* (car

notamment 2' redevient 2) donnent naissance à trois nouveaux cercles tangents (*en bleu*). Et ainsi de suite. Chacun de ces cercles est tangent à trois cercles qui lui sont adjacents. L'empilement de cercles d'Apollonius apparaît comme étant l'ensemble limite du système des quatre inversions, et il reste globalement invariant sous leur effet.

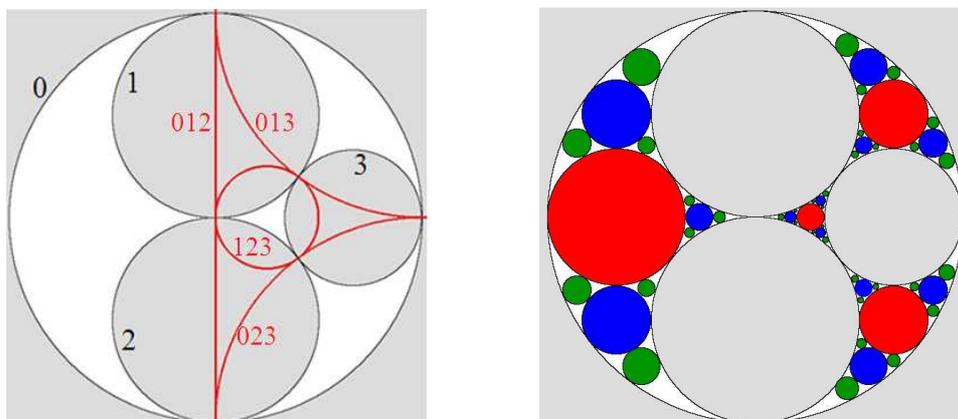


Figure 3 : A gauche la configuration de quatre cercles mutuellement tangents, avec les quatre cercles d'inversion *en rouge*. A droite les trois premières étapes de construction (en rouge, puis bleu puis vert) des cercles de l'empilement obtenus par inversions.

Calculons le nombre  $u_n$  de cercles à l'étape  $n$ , en notant  $v_n$  le nombre de nouveaux cercles à cette étape. A l'étape 0, on a 4 cercles :  $u_0 = 4$  et quatre interstices disponibles. A l'étape 1, les quatre interstices sont remplis par 4 cercles, d'où  $v_1 = 4$  et  $u_1 = 8$ . Chacun des nouveaux cercles donne naissance à trois interstices disponibles autour de lui. A l'étape 2, on a  $v_2 = 3 v_1 = 12$  et  $u_2 = u_1 + v_2 = 20$ . Cela se généralise aux étapes suivantes : chaque nouveau cercle ouvre trois places disponibles pour l'étape d'après,  $v_n = 4 \times 3^{n-1}$ , et  $u_n = 4 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = 4 + 4(3^n - 1) / 2$ . Finalement  $u_n = 2(1 + 3^n)$ .

### Exercice 2 : Autres configurations des cercles d'Apollonius

Sur les figures précédentes, les points de contacts des trois cercles intérieurs et du cercle extérieur de rayon 1 ont été choisis simplement, afin de faciliter les calculs, en l'occurrence ce sont les points  $a_1 = i$ ,  $a_2 = 1$  et  $a_3 = -i$ . Mais on sait qu'une transformation de Möbius (de la forme  $z' = (az + b) / (cz + d)$  avec  $a d - b c \neq 0$ ) est déterminée de façon unique par trois points et leurs transformés. En prenant trois points quelconques  $a'_1, a'_2, a'_3$  sur le cercle unité, et en appliquant la transformation qui fait passer des points  $a_k$  ( $k$  de 1 à 3) aux points  $a'_k$ , les cercles restent des cercles tangents entre eux, et l'on obtient une nouvelle configuration de cercles d'Apollonius.

1) Prendre comme points  $a'_k$  les points formant un triangle équilatéral avec  $a'_1 = i$ ,  $a'_2 = i e^{-i2\pi/3}$  et  $a'_3 = i e^{i2\pi/3}$ . Déterminer la transformation de Möbius  $f$  faisant passer des points  $i, 1, -i$  aux points  $0, \infty, 1$ , puis la transformation  $g$  faisant passer de des points  $i, i e^{-i2\pi/3}, i e^{i2\pi/3}$  aux points  $0, \infty, 1$ . En déduire la transformation faisant passer des points  $a_k$  aux points  $a'_k$ .

Avec  $f$  faisant passer de  $i$  à 0 et de 1 à  $\infty$ ,  $f$  est de la forme  $f(z) = K \frac{z-i}{z-1}$ . Avec  $f(-i) = 1$ , on trouve  $K = (1-i) / 2$ .

De même,  $g$  est de la forme  $g(z) = K' \frac{z-i}{z-i e^{-i2\pi/3}}$  et l'on trouve ensuite  $K' = e^{-i\pi/3}$ .

La transformation cherchée est  $g^{-1} \circ f$ . La matrice associée est le produit

$$\begin{pmatrix} (-\sqrt{3}+i)/2 & iK' \\ -1 & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & -iK \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après calcul, on trouve comme transformation  $z' = \frac{Az + B}{Cz + D}$  avec

$$A = (1 + \sqrt{3})/4 + i(3 + \sqrt{3})/4$$

$$B = (1 - \sqrt{3})/4 + i(\sqrt{3} - 3)/4$$

$$C = i(1 - \sqrt{3})/2$$

$$D = i(1 + \sqrt{3})/2$$

2) Visualiser la nouvelle configuration d'empilements de cercles.

Il suffit d'appliquer la transformation précédente aux cercles de la *figure 2* ci-dessus, ce qui donne par programme la *figure 4*.

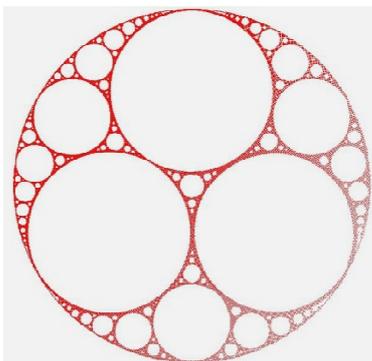


Figure 4 : La nouvelle configuration de cercles d'Apollonius.

3) Que peut-on en conclure si l'on se place en géométrie hyperbolique dans le disque de Poincaré ?

Le disque unité est maintenant le disque de Poincaré, et les cercles euclidiens d'Apollonius deviennent des cercles hyperboliques ou des horocycles. La transformation de Möbius faisant passer des 3 points  $a_k$  aux points  $a'_k$  (qui se succèdent dans le même ordre) est alors une isométrie positive transformant les cercles tangents en cercles tangents. Cela entraîne que toutes les configurations d'Apollonius sont isométriques en géométrie hyperbolique.

### 3. Le théorème de Descartes

Considérons quatre cercles  $C_0, C_1, C_2, C_3$  dont chacun est tangent aux trois autres, et de rayons  $r_i$  ( $i$  de 0 à 4).

Lorsque les 4 cercles sont tangents extérieurement, on a alors cette relation :

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}\right)$$

Lorsque les trois cercles  $C_0, C_1, C_2$  sont tangents extérieurement et le cercle  $C_4$  tangent intérieurement avec les trois autres, cette relation devient :

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}\right)$$

En appelant courbure  $a_i$  l'inverse du rayon  $r_i$ , et en lui ajoutant un signe + si le cercle concerné est tangent extérieurement aux autres, et - si le cercle est tangent intérieurement, les deux formules se réduisent à une seule :

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^2 = 2(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Cette propriété a été trouvée par R. Descartes en 1643<sup>3</sup>. Elle équivaut à la formule suivante, où l'on isole  $a_4$  pour l'avoir en fonction des trois autres, soit

$$a_3 = a_0 + a_1 + a_2 \pm 2\sqrt{a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2} \quad \text{ou encore} \quad (a_0 + a_1 + a_2 - a_3)^2 = 4(a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2)$$

En effet, partons de  $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^2 = 2(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$  et développons :

$$a_3^2 + (a_0 + a_1 + a_2)^2 + 2a_3(a_0 + a_1 + a_2) = 2a_3^2 + 2(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)$$

$$a_3^2 - 2(a_0 + a_1 + a_2)a_3 - (a_0 + a_1 + a_2)^2 + 2(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)$$

$$a_3^2 + 2(a_0 + a_1 + a_2)a_3 + a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2(a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2) = 0$$

Le discriminant réduit  $\delta$  de cette équation en  $a_4$  est égal à

$$(a_0 + a_1 + a_2)^2 - (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) + 2(a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2) = 4(a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2)$$

L'équation admet deux solutions (on savait déjà qu'il y a deux solutions) :

$a_3 = a_0 + a_1 + a_2 \pm 2\sqrt{a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2}$  ou  $(a_0 + a_1 + a_2 - a_3)^2 = 4(a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2)$ . Il y a bien équivalence entre les formules initiale et finale.

### Exemples

Si l'on part de trois cercles tangents extérieurement, il existe toujours deux cercles qui leur sont tangents. Par contre, si l'on part d'un cercle englobant les deux autres ( $a_0 < 0$ ) de rayon  $R_0 = -1/a_0$ , il est nécessaire que  $R_1 < R_0$ , soit  $a_1 > -a_0$ , et que  $R_1 + R_2 \leq R_0$ , soit  $1/a_1 + 1/a_2 \leq -1/a_0$ , ou  $a_1 + a_2 \leq -a_1a_2/a_0$ , ou encore  $a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2 \geq 0$ , ce qui assure l'existence de la racine carrée de la formule précédente. Ces contraintes sont vérifiées dans les exemples qui suivent, où l'on applique la formule :

- \* A partir des trois cercles de courbures  $-1, 2, 2$ , on trouve les deux cercles de courbures  $3$  et  $3$ .
- \* A partir des courbures  $-1, 2, 4$ , on trouve les deux cercles de courbures  $5 \pm 2\sqrt{2}$ .
- \* A partir des courbures  $-6, 11, 14$ , on trouve les deux cercles de courbures  $15$  et  $23$ .

## 3.1. Démonstration de la formule de Descartes

Nous allons démontrer<sup>4</sup> que

$$(a_0 + a_1 + a_2 - a_3)^2 = 4(a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2), \text{ soit}$$

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_0r_1} + \frac{1}{r_0r_2} + \frac{1}{r_1r_2}\right) \text{ si le quatrième cercle } C_3 \text{ est tangent extérieurement ou}$$

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_0r_1} + \frac{1}{r_0r_2} + \frac{1}{r_1r_2}\right) \text{ si le quatrième cercle } C_3 \text{ est tangent intérieurement.}$$

Posons  $S = \frac{1}{r_0r_1} + \frac{1}{r_0r_2} + \frac{1}{r_1r_2}$ . Utilisons les résultats trouvés dans l'exercice 1, avec l'inversion de cercle centré en  $O$  et de rayon  $2r_0$ , ainsi que les choix que nous avons faits sur les cercles. On connaît  $r'_2$  rayon du cercle  $C'_2$  inverse de  $C_2$  ainsi que son centre  $(x'_2, y'_2)$  :

$$r'_2 = r_0(r_0 + r_1)/r_1 \text{ et } y'_2 = r_0(r_1 - r_0)/r_1. \text{ Grâce aux formules d'inversion, on en déduit}$$

<sup>3</sup> Sur l'histoire de ce théorème et ses prolongements, on pourra consulter [PEL2014].

<sup>4</sup> La méthode par inversion que nous utilisons ici est proposée dans [SAR2009] et reprise dans [LAG2011]. Mais chez ces auteurs elle ne traite en fait que le cas particulier où les deux cercles  $C_0$  et  $C_1$  ont le même rayon, puisqu'il y est supposé que les droites  $C'_0$  et  $C'_1$  ont pour équation  $y = \pm 1$ .

$$r_2 = \frac{4r_0^2 r'_2}{|D|} \text{ avec } D = x'^2_2 + y'^2_2 - r'^2_2 = x'^2_2 + \frac{r_0^2(r_1 - r_0)^2}{r_1^2} - \frac{r_0^2(r_1 + r_0)^2}{r_1^2} = x'^2_2 - 4\frac{r_0^3}{r_1}.$$

Comme on peut considérer les trois cercles  $C_0, C_1, C_2$  tangents extérieurement, on a vu que  $x'_2$  peut être pris quelconque mais avec  $x'^2_2 > 4\frac{r_0^3}{r_1}$ . Alors  $|D| = D$ . Finalement  $r_2 = \frac{4r_0^2 r'_2}{x'^2_2 - 4\frac{r_0^3}{r_1}} = \frac{4r_0^3(r_0 + r_1)}{r_1 x'^2_2 - 4r_0^3}$

$$S = \frac{1}{r_0 r_1} + \frac{1}{r_0 r_2} + \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r_0 r_1} + \frac{r_0 + r_1}{r_0 r_1 r_2} = \frac{1}{r_0 r_1} + \frac{r_1 x'^2_2 - 4r_0^2}{4r_0^4 r_1} = \frac{4r_0^3 + r_1 x'^2_2 - 4r_0^2}{4r_0^4 r_1} = \frac{r_1 x'^2_2}{4r_0^4 r_1} = \frac{x'^2_2}{4r_0^4}$$

Prenons maintenant  $S' = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \mp \frac{1}{r_3}\right)^2$  selon les deux cas possibles.

On a vu que  $\frac{1}{r_2} = \frac{D}{4r_0^2 r'_2}$  avec  $D = x'^2_2 + y'^2_2 - r'^2_2$

\* Choisissons d'abord le cercle  $C_3$  tangent extérieurement aux trois autres, et inverse du cercle  $C'_3$  situé à droite de  $C_2$  : on a  $\frac{1}{r_3} = \frac{|D'|}{4r_0^2 r'_2}$  avec  $D' = x'^2_3 + y'^2_3 - r'^2_3 = (x'_2 + 2r'_2)^2 + y'^2_2 - r'^2_2$ , car  $y'_3 =$

$y'_2$  et  $r'_3 = r'_2$ , et  $D' > 0$  car  $O$  est à l'extérieur du cercle  $C_3$ , d'où  $\frac{1}{r_3} = \frac{D'}{4r_0^2 r'_2}$ .

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = \frac{D - D'}{4r_0^2 r'_2} = \frac{x'^2_2 - (x'_2 + 2r'_2)^2}{4r_0^2 r'_2} = \frac{-4r'_2 x'_2 - 4r'^2_2}{4r_0^2 r'_2} = \frac{-x'_2 - r'_2}{r_0^2} = -\frac{r_1 x'_2 + r_0(r_0 + r_1)}{r_0^2 r_1}$$

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = \frac{r_0 + r_1}{r_0 r_1} - \frac{r_1 x'_2 + r_0(r_0 + r_1)}{r_0^2 r_1} = \frac{r_0(r_0 + r_1) - r_1 x'_2 + r_0(r_0 + r_1)}{r_0^2 r_1} = \frac{x'^2_2}{r_0^2}$$

Finalement  $S' = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{x'^2_2}{r_0^4}$  et l'on a bien  $S' = 4S$ .

\* Choisissons maintenant le cercle  $C_3$  tangent intérieurement aux trois autres, et inverse du cercle  $C'_3$  situé à gauche de  $C'_2$ . On a  $\frac{1}{r_3} = \frac{|D'|}{4r_0^2 r'_2}$  avec  $D' = x'^2_3 + y'^2_3 - r'^2_3 = (x'_2 - 2r'_2)^2 + y'^2_2 - r'^2_2$ .

Dans le cas présent, le point  $O$  est à l'intérieur du cercle  $C_3$  et  $D' < 0$ , d'où  $\frac{1}{r_3} = \frac{-D'}{4r_0^2 r'_2}$ . On en déduit

que  $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{D - D'}{4r_0^2 r'_2}$ . Le calcul ne change pas, et  $S' = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{x'^2_2}{r_0^4}$ . On trouve encore  $S' = 4S$ .

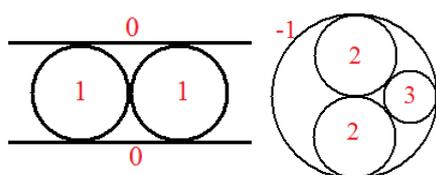
## 2.2. Configurations de Descartes et cercles d'Apollonius à courbures toutes entières

On appelle configuration de Descartes une configuration de quatre cercles dont chacun est tangent aux trois autres. Appelons  $a, b, c, d$  les courbures de ces quatre cercles. On sait qu'il y a deux configurations possibles, celle où les cercles sont tangents extérieurement, et où tous les  $a, b, c, d$  sont positifs (ou nuls), et celle où un cercle est tangent intérieurement aux autres, avec l'une des courbures négative et les autres positives. Comme l'ordre ne joue pas, nous décidons d'écrire  $a, b, c, d$  dans

l'ordre croissant. Cela impose  $a \leq 0 \leq b \leq c \leq d$ . On sait aussi que les quatre nombres  $a, b, c, d$  sont solutions de l'équation :

$$(a+b+c+d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Remarquons qu'en multipliant ces quatre nombres par un coefficient  $k$ , l'équation reste vérifiée. On va donc ne traiter que les cas où le pgcd des quatre nombres vaut 1. Ces configurations sont appelées primitives. A partir de l'une d'elles on en a une infinité d'autres qui s'en déduisent par homothéties, ce qui donne la même forme globale à un grossissement près.



Enfin, on ne va s'intéresser ici qu'aux configurations primitives de Descartes formées de quatre nombres entiers. Il en existe, et l'on en connaît déjà deux, rencontrées précédemment, soit  $(0, 0, 1, 1)$  et  $(-1, 2, 2, 3)$ . Il s'agit de configurations initiales à partir desquelles nous avons construits nos empilements infinis de cercles tous englobés dans un cercle frontière, voire deux (cf. figure ci-contre). Ce qui est remarquable, c'est que l'infinité des cercles obtenus vont tous être à courbure entière, et c'est ce que nous allons vérifier dans ce qui suit.

On a besoin de la propriété suivante :

Si  $a, b, c, d$  est une configuration de Descartes, alors  $a, b, c, d'$  avec  $d' = 2(a + b + c) - d$  est aussi une configuration de Descartes. Si  $a, b, c, d$  sont des entiers, alors  $a, b, c, d'$  sont aussi des entiers. Ce que l'on a fait en gardant  $a, b, c$  et en modifiant  $d$  peut aussi être fait en gardant  $a, b, d$  et en modifiant  $c$ , ou en gardant  $a, c, d$ , ou  $b, c, d$ . Ainsi quatre transformations sont possibles.

Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de Descartes. On a vu qu'à partir de trois cercles tangents de courbure  $a, b, c$ , on en trouvait toujours deux autres de courbure  $d$  et  $d'$  avec  $d, d'$  égaux à  $a + b + c \pm 2\sqrt{ab + ac + bc}$ , d'où  $d + d' = 2(a + b + c)$ .

### 2.2.1. Configurations initiales

Prenons une configuration initiale de Descartes, avec  $a, b, c, d$  entiers et  $a, b, c, d$  dans l'ordre croissant, cette configuration étant primitive, soit  $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ . On distingue deux cas :

\* soit  $a < 0$  et  $b, c, d > 0$ , comme par exemple  $(-1, 2, 2, 3)$ . Alors  $a + b + c + d > 0$ . En effet la formule de Descartes peut s'écrire  $(a - b)^2 + (c - d)^2 = (a + b)(c + d)$ .<sup>5</sup> Avec  $(a - b)^2 + (c - d)^2 \geq 0$  et  $c + d > 0$ , on a  $a + b \geq 0$ , d'où  $a + b + c + d > 0$ .

\* soit  $a = 0$ , et  $b, c, d > 0$ . Si  $b = 0$ , on a forcément  $c = d$ , la formule de Descartes est toujours vérifiée, et la seule solution primitive est  $0, 0, 1, 1$ , et  $a + b + c + d > 0$ . Si  $b > 0$ , on a aussi  $a + b + c + d > 0$ .

<sup>5</sup> Partons de la formule de Descartes :  $(a+b+c+d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ . En développant,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd = 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + c^2 + d^2 - 2cd = 2ac + 2ad + 2bc + 2bd$$

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = 2(a+b)(c+d)$$

Dans tous les cas, la configuration initiale est telle que  $a + b + c + d > 0$ . Cela ne suffit pas à caractériser une configuration initiale (aussi appelée racine<sup>6</sup>). Par exemple la configuration  $-1, 2, 3, 6$  est aussi telle que  $a + b + c + d > 0$  avec  $a < 0$  et  $b, c, d > 0$ , mais ce n'est pas une configuration initiale qui elle correspond à une sorte de configuration minimale en terme de courbures. Nous verrons plus tard la définition précise de cette configuration initiale ou racine. Les exemples suivants vont permettre de mieux comprendre.

### 2.2.2. Cercles d'Apollonius obtenus à partir de la configuration $(-1, 2, 2, 3)$

Numérotons 0, 1, 2, 3 les cercles initiaux. A l'étape 1 apparaissent 4 nouveaux cercles :

\* Le cercle 4 est tangent à 0, 1, 2, avec le cercle 3 déjà tangent à 0, 1, 2. La courbure du cercle 4 est donc  $d' = 2(a + b + c) - d = 2(-1 + 2 + 2) - 3 = 3$ .

\* Le cercle 5 est tangent à 0, 1, 3, avec le cercle 2 déjà tangent à 0, 1, 3. La courbure du cercle 5 est  $c' = 2(a + b + d) - c = 2(-1 + 2 + 3) - 2 = 6$ .

\* Le cercle 6 est tangent à 0, 2, 3, avec le cercle 1 déjà tangent à 0, 2, 3. La courbure du cercle 6 est  $b' = 2(a + c + d) - b = 2(-1 + 2 + 3) - 2 = 6$ .

\* Le cercle 7 est tangent à 1, 2, 3, avec le cercle 0 déjà tangent à 1, 2, 3. La courbure du cercle 7 est  $a' = 2(b + c + d) - a = 2(2 + 2 + 3) + 1 = 15$ .

Ainsi, à partir des 4 cercles 0, 1, 2, 3 de la configuration de Descartes  $-1, 2, 2, 3$ , on a les passages :

$$-1, 2, 2, \underline{3} \rightarrow -1, 2, 2, 3$$

$$-1, 2, \underline{2}, 3 \rightarrow -1, 2, 3, 6$$

$$-1, \underline{2}, 2, 3 \rightarrow -1, 2, 3, 6$$

$$\underline{-1}, 2, 2, 3 \rightarrow 2, 2, 3, 15 \text{ où l'on a souligné le terme qui change.}$$

Passons à l'étape 2, où chacun des 4 cercles précédents donnent seulement trois nouveaux cercles.

Numérotons 8, 9, 10 les trois cercles autour du cercle 4, lui-même tangent à 0, 1, 2, ces 4 cercles 0, 1, 2, 4 correspondant à la configuration  $-1, 2, 2, 3$ . On a comme précédemment les 4 passages

$$-1, 2, 2, \underline{3} \rightarrow -1, 2, 2, 3$$

$$-1, 2, \underline{2}, 3 \rightarrow -1, 2, 3, 6$$

$$-1, \underline{2}, 2, 3 \rightarrow -1, 2, 3, 6$$

$$\underline{-1}, 2, 2, 3 \rightarrow 2, 2, 3, 15$$

Mais on ne prend pas le premier passage où le cercle 4 est remplacé par l'autre cercle tangent à 0, 1, 2, soit le cercle 3 (de courbure 3). Les cercles 8, 9, 10 ont les courbures 6, 6, 15.

Numérotons 11, 12, 13 les trois cercles autour du cercle 5, lui-même tangent à 0, 1, 3, ces 4 cercles 0, 1, 3, 5 correspondant à la configuration  $-1, 2, 3, 6$ . On a les 4 passages

$$-1, 2, 3, \underline{6} \rightarrow -1, 2, 2, 2$$

$$-1, 2, \underline{3}, 6 \rightarrow -1, 2, 6, 11$$

$$-1, \underline{2}, 3, 6 \rightarrow -1, 3, 6, 14$$

$$\underline{-1}, 2, 3, 6 \rightarrow 2, 3, 6, 23$$

Les cercles 11, 12, 13 ont pour courbure 11, 14, 23. Il en est de même pour les cercles 14, 15, 16.

Restent les cercles 17, 18, 19, autour du cercle 7 lui-même tangent à 1, 2, 3, soit la configuration  $2, 2, 3, 15$  (figure 5). On a les passages

$$2, 2, 3, \underline{15} \rightarrow -1, 2, 2, 3$$

$$2, 2, \underline{3}, 15 \rightarrow 2, 2, 15, 35$$

$$2, \underline{2}, 3, 15 \rightarrow 2, 3, 15, 38$$

<sup>6</sup> Cette dénomination est notamment utilisée dans [GRA2001].

$\underline{2}, 2, 3, 15 \rightarrow 2, 3, 15, 38$

Les cercles 17, 18, 19 ont pour courbure 35, 38, 38.

Et ainsi de suite aux étapes suivantes, où chacun des cercles précédents donnent naissance à trois cercles. Sur les quatre passages possibles, on élimine celui qui donne la plus petite somme  $a + b + c + d$ , ou encore celui où l'on passe d'une somme à une somme plus petite. Cela est dû au fait que chaque nouveau cercle a une courbure plus grande (un rayon plus petit) que ceux dont il vient. On dispose ainsi d'un algorithme permettant de calculer progressivement les courbures des cercles d'Apollonius.

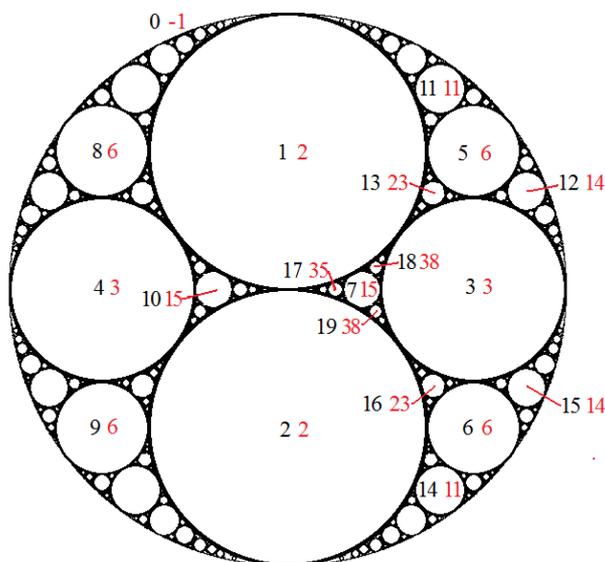


Figure 5 : Cercles d'Apollonius, ceux obtenus au cours des deux premières étapes ayant leur numérotation en noir et leur courbure en rouge.

On constate aussi qu'à partir de la configuration initiale primitive, toutes les configurations de Descartes sont primitives. En effet, supposons la configuration  $a, b, c, d$  primitive. Lors du passage elle devient  $a, b, c, d' = 2(a + b + c) - d$ . Si cette nouvelle configuration n'était pas primitive, on aurait  $a = k a', b = k b', c = k c'$  et  $d' = k d'' = 2(k a' + k b' + k c') - d$ , et  $k$  diviserait aussi  $d$ , la configuration  $a, b, c, d$  ne serait plus primitive.

Enfin, sur les quatre transformations possibles à partir d'une configuration, l'une d'elles permet un retour arrière, celle où le nouveau  $d$  est inférieur à l'ancien. Ainsi à partir d'une configuration de Descartes quelconque, on peut remonter à la configuration initiale. Par exemple :

$2, 15, 35, 102 \rightarrow 2, 2, 15, 35$  (car 102 est remplacé par 2)  $\rightarrow 2, 2, 3, 15 \rightarrow -1, 2, 2, 3 \rightarrow -1, 2, 2, 3$  et l'on s'arrête quand le plus grand terme ne diminue plus : on vient d'obtenir la configuration initiale  $-1, 2, 2, 3$  avec son premier terme négatif.

### Exercice 3 : Cercles d'Apollonius à partir de la configuration $0, 0, 1, 1$

Déterminer les courbures des cercles d'Apollonius lors des premières étapes de leur construction à partir de la configuration initiale  $0, 0, 1, 1$ .

Partons des 4 cercles numérotés  $0, 1, 2, 3$  ( $0$  et  $1$  étant des droites) de configuration  $0, 0, 1, 1$ , 1 pour les courbures. A l'étape 1, le cercle 3 est remplacé par le cercle 4 de courbure 1, le cercle 2 est remplacé par le cercle 5 de courbure 1, les cercles 1 et 0 sont remplacés par les cercles 6 et 7 de courbure 4, soit :

$$0 \ 0 \ \underline{1} \ 1 \rightarrow 0 \ 0 \ 1 \ 1$$

$$0 \ 0 \ \underline{1} \ 1 \rightarrow 0 \ 0 \ 1 \ 1$$

$$\underline{0} \underline{0} 1 1 \rightarrow 0 1 1 4$$

$$\underline{0} \underline{0} 1 1 \rightarrow 0 1 1 4$$

A l'étape 2 sont créés trois cercles 8, 9, 10 autour du cercle 4 tangent à 0, 1, 2, trois cercles 11, 12, 13 autour de 5, trois cercles 14, 15, 16 autour de 6 et enfin 17, 18, 19 autour de 7 (figure 6):

$$0 0 1 \underline{1} \rightarrow 0 0 1 1 \text{ (on retourne au cercle 3)}$$

$$0 0 \underline{1} 1 \rightarrow 0 0 1 1 \text{ cercle 8 de courbure 1}$$

$$0 \underline{0} 1 1 \rightarrow 0 1 1 4 \text{ cercle 9 de courbure 4}$$

$$\underline{0} 0 1 1 \rightarrow 0 1 1 4 \text{ cercle 10 de courbure 4}$$

Il en est de même pour les cercles 11, 12, 13.  
 Traitons maintenant les cercles 14, 15, 16 :

$$0 1 1 \underline{4} \rightarrow 0 0 1 1 \text{ (on retourne au cercle 1)}$$

$$0 1 \underline{1} 4 \rightarrow 0 1 4 9$$

$$0 \underline{1} 1 4 \rightarrow 0 1 4 9$$

$$\underline{0} 1 1 4 \rightarrow 1 1 4 12$$

Il en est de même pour les cercles 17, 18, 19.

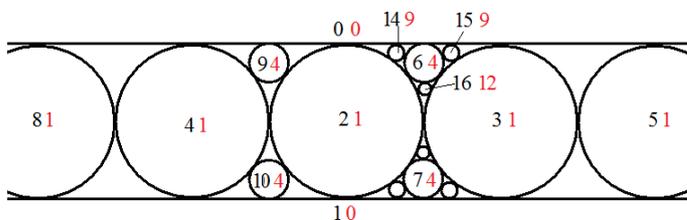


Figure 6 : Cercles d'Apollonius obtenus lors des deux premières étapes de construction, avec *en noir* la numérotation des cercles, et *en rouge* leur courbure.

En continuant, on trouverait des cercles de courbures 16, 25, 28 autour des cercles de courbure 9, et des cercles de courbures 24, 33, 33 autour des cercles de courbure 12.

### 2.2.3. Cas général

Les exemples précédents se généralisent. Une configuration de Descartes initiale primitive, avec  $a, b, c, d$  entiers, écrite dans l'ordre croissant avec  $a \leq 0 \leq b \leq c \leq d$  et  $a + b + c + d > 0$ , se définit précisément comme étant celle où  $d'$  est supérieur ou égal à  $d$ . Par exemple :

$$-1, 2, 2, \underline{3} \rightarrow -1, 2, 2, 3 \text{ et } -1, 2, 2, 3 \text{ est une configuration initiale.}$$

$$-6, 11, 14, \underline{15} \rightarrow -6, 11, 14, 23, \text{ et } -6, 11, 14, 23 \text{ est une configuration initiale.}$$

Avec  $d' = 2(a + b + c) - d$ , le fait d'avoir  $d' \geq d$  équivaut à  $a + b + c \geq d$ .

Les règles de passage permettent alors d'obtenir toutes les configurations à partir de la configuration initiale. Et toutes ces configurations sont non seulement entières mais primitives.

Inversement, à partir d'une configuration, on peut remonter à la configuration initiale. Par exemple :

$$-6, 14, 123, 191 \rightarrow -6, 14, 71, 123 \rightarrow -6, 14, 35, 71 \rightarrow -6, 14, 15, 35 \rightarrow -6, 11, 14, 15 \rightarrow -6, 11, 14, 23.$$

La configuration initiale est celle où  $d$  atteint son minimum, soit  $-6, 11, 14, 15$ .

### 2.2.4. Nombre de configurations initiales

On sait que pour  $a = 0$ , il existe une configuration initiale unique  $0, 0, 1, 1$ . Pour  $a < 0$ , en posant  $a = -n$ , on a cette formule donnant le nombre  $N(-n)$  des configuration initiales :

$$N(-n) = \frac{n}{4} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) + 2^{\omega(n) - \delta(n) - 1}$$

avec  $\chi(p) = (-1)^{(p-1)/2}$  pour  $n$  impair et 0 pour  $n$  pair  
 $\omega(n)$  = nombre de nombres premiers dans  $n$   
 $\delta(n) = 1$  si  $n = 2$  [4] et 0 sinon.

Notamment, pour  $p$  premier impair, on trouve

$$\begin{aligned} N(-p) &= \frac{p}{4} \left(1 - \frac{(-1)^{(p-1)/2}}{p}\right) + 1 \\ &= \frac{p+3}{4} \text{ si } p \equiv 1 [4] \text{ ou} \\ &\quad \frac{p+5}{4} \text{ si } p \equiv 3 [4] \end{aligned}$$

On trouvera des démonstrations de cette formule dans [GRA2003] et [NOR2002]. Nous nous contenterons ici de donner le début de la démonstration de [GRA2003] qui permet de déterminer assez aisément les configurations initiales.

Reprenons la formule de Descartes :  $(a+b+c+d)^2 = 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$ . Comme 2 divise  $(a+b+c+d)^2$ , 2 divise aussi  $a+b+c+d$ . On a vu que la formule de Descartes pouvait aussi s'écrire  $(a+b+c-d)^2 = 4(ab+ac+bc)$ . Nous allons procéder à un changement de variables en posant d'abord  $a+b+c-d = 2D$  car  $a+b+c+d$  pair,  $a+b+c-d$  est aussi pair. Le premier membre de l'égalité précédente devient  $4D^2$ . D'autre part,  $ab+ac+bc = (a+b)(a+c) - a^2$ , ce qui nous invite à poser  $B = a+b$ ,  $C = a+c$  et  $A = a$ . La formule de Descartes devient  $4D^2 = 4(BC - A^2)$ , soit

$D^2 + A^2 = BC$  et cette équation lui est équivalente puisque les formules de passage s'inversent :

$$\begin{aligned} A &= a, B = a+b, C = a+c, D = (a+b+c-d)/2, \text{ ce qui s'écrit aussi bien :} \\ a &= A, b = B-A, c = C-A, d = -A+B+C-2D \end{aligned}$$

Prenons une configuration initiale : elle doit vérifier  $a < 0 \leq b \leq c \leq d$ ,  $a+b+c+d > 0$ ,  $a+b+c \geq d$ , et elle est primitive. Le fait d'avoir  $b \leq c$  devient  $B \leq C$ . Le fait d'avoir  $c \leq d$  donne  $C - A \leq -A + B + C - 2D$ , soit  $2D \leq B$ , et  $a+b+c-d \geq 0$  donne  $2D \geq 0$ . D'où

$$A < 0 \leq 2D \leq B \leq C$$

Montrons enfin que le pgcd de  $A, B, C$  vaut 1. Si tel n'était pas le cas, on aurait  $A = kA'$ ,  $B = kB'$ ,  $C = kC'$ , ce qui donne  $a = ka'$ , et avec  $B = a+b$ ,  $b = kb'$  et avec  $C = a+c$ ,  $c = kc'$ . Alors  $k^2$  diviserait  $ab+ac+bc$ ,  $k^2$  diviserait  $(a+b+c+d)^2$ ,  $k$  diviserait  $a+b+c+d$ , et  $k$  diviserait  $d$ . On n'aurait plus  $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ . Donc  $\text{pgcd}(A, B, C) = 1$ .

En conclusion une configuration initiale vérifie

$$\begin{aligned} D^2 + A^2 &= BC \\ A < 0 &\leq 2D \leq B \leq C \\ \text{pgcd}(A, B, C) &= 1 \end{aligned}$$

Remarquons que cela impose que  $B > 0$  et  $4D^2 \leq B^2 \leq D^2 + A^2$  car  $B \leq C$ , d'où  $3D^2 \leq A^2$ , et  $D \leq 0,58n$ , en posant  $A = -n$ .

#### **Exercice 4 : Recherche des configurations initiales $(-n, b, c, d)$ pour $n > 0$**

1) Montrer que pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , il existe une configuration initiale unique.

\*  $n = 1$ . Pour  $D = 0$ , on a  $BC = 1$ , soit  $B = 1$  et  $C = 1$ , d'où la configuration initiale  $(-1, 2, 2, 3)$  en utilisant les relations

$$a = A, b = B - A = B + n, c = C - A = C + n, d = -A + B + C - 2D = n + B + C - 2D.$$

Comme on doit avoir  $D \leq 0,58$ , soit  $D = 0$ , il n'y a pas d'autre possibilité.

\*  $n = 2$ . Pour  $D = 0$ , on a  $B = 1, C = 4$  d'où la configuration initiale  $(-2, 3, 6, 7)$ , soit  $B = C = 2$ , mais cela ne convient pas car  $\text{pgcd}(A, B, C) = 2$  et ce n'est pas une configuration primitive. Pour  $D = 1$ , on a  $BC = 5$ , ce qui impose  $B = 1$ , mais on n'a plus  $2D \leq B$ , et l'on n'a pas de solution. Comme on doit avoir  $D \leq 0,58 \times 2$ , soit  $D \leq 1$ , il n'y a pas d'autre possibilité. On a bien une solution unique.

2) Montrer que pour  $D = 0$ , il y a toujours au moins une solution, et qu'elle est unique pour  $n$  premier impair.

Pour  $D = 0, BC = n^2$ . En prenant  $B = 1$  et  $C = n^2$ , toutes les contraintes sont vérifiées, et l'on a une solution  $(-n, n + 1, n(n + 1), n(n + 1) + 1)$ . Lorsque  $n$  est premier, il existe une seule autre possibilité :  $B = C = n$ , mais on n'a plus  $\text{pgcd}(n, B, C) = 1$ , et ce n'est pas une solution primitive.

3) Montrer que pour  $n$  impair à partir de 3, il existe toujours au moins deux solutions.

On a vu qu'il y a toujours au moins une solution pour  $D = 0$ . Prenons  $D = 1$ , alors  $n^2 + 1 = BC$ . Puisque  $n^2 + 1$  est pair, prenons  $B = 2$  et  $C = (n^2 + 1) / 2 + n = (n + 1)^2 / 2$ , et l'on a bien  $2D \leq B$  et  $B \leq C$ . On trouve une deuxième solution  $(-n, n + 2, (n + 1)^2 / 2, (n + 1)^2 / 2)$ .

4) Déterminer les configurations pour  $n = 3, n = 5, n = 7, n = 11$  et  $n = 13$ .

\*  $n = 3$ . On sait déjà que pour  $D = 0$ , on a la solution unique  $(-3, 4, 12, 13)$ . Pour  $D = 1$ , et  $BC = 10$ , soit  $B = 2, C = 5$ , et il y a déjà la solution  $(-3, 5, 8, 8)$  qui est la seule pour  $D = 1$ . Enfin on a  $D \leq 0,58 \times 3, D \leq 1$ . Il existe donc deux solutions.

\*  $n = 5$ . Pour  $D = 0$ , on a la solution unique  $(-5, 6, 30, 31)$ . Pour  $D = 1$  et  $BC = 26 = 2 \times 13$ , il y a la seule solution  $(-5, 7, 18, 18)$ . Pour  $D = 2, BC = 29$ , et  $B \geq 4$ , il n'y a pas de solution. Avec  $D \leq 0,58 \times 5, D \leq 2$ . Il existe deux solutions.

\*  $n = 7$ .

Pour  $D = 0$ , on a la solution unique  $(-7, 8, 56, 57)$ .

Pour  $D = 1$  et  $BC = 50 = 2 \times 5 \times 5$ , il y a déjà la solution pour  $B = 2$  et  $C = 25$ , soit  $(-7, 9, 32, 32)$ , et un autre cas se présente avec  $B = 5, C = 10$ , ce qui donne une autre solution  $(-7, 12, 17, 20)$ .

Pour  $D = 2, BC = 53$ , et avec  $B \geq 4$ , rien ne convient.

Pour  $D = 3, BC = 58 = 2 \times 29$  et avec  $B \geq 6$ , il n'y a pas de solution.

De même pour  $D = 4, BC = 65 = 5 \times 13$  et  $B \geq 8$ , il n'y a pas de solution.

On doit aussi avoir  $D \leq 0,58 \times 7 \leq 4$ . Finalement on a trois solutions.

\*  $n = 11$ .

Pour  $D = 0$ , on a la solution unique  $(-11, 12, 132, 133)$ .

Pour  $D = 1$  et  $BC = 122 = 2 \times 61$ , il y a la solution pour  $B = 2$  et  $C = 61$ , soit  $(-11, 13, 72, 72)$ , et c'est tout.

Pour  $D = 2$ ,  $BC = 125 = 5 \times 5 \times 5$ , la seule possibilité est  $B = 5$  et  $C = 25$ , ce qui donne  $(-11, 16, 36, 37)$ .

Pour  $D = 3$ ,  $BC = 130 = 2 \times 5 \times 13$ , soit  $B = 2$ , mais avec  $B \geq 2D$  cela ne convient pas, soit  $B = 10$ ,  $C = 13$ , et l'on a la solution  $(-11, 21, 24, 28)$ .

Pour  $D = 4$ ,  $BC = 137$ , et  $B = 1$  ne peut pas convenir avec  $B \geq 2D$ .

Pour  $D = 5$ ,  $BC = 146 = 2 \times 73$  et  $B = 2$  ne convient pas.

Pour  $D = 6$ ,  $BC = 157$  et  $B = 1$  ne convient pas.

On doit avoir  $D \leq 0,58 \times 11 \leq 6$ . Finalement, on trouve trois solutions.

\*  $n = 13$ .

Pour  $D = 0$ , on a la solution  $(-13, 14, 182, 183)$ .

Pour  $D = 1$  et  $BC = 170 = 2 \times 5 \times 17$ . On a trois possibilités pour  $B : 2, 5, 10$ . Pour  $B = 2$ ,  $C = 85$ , pour  $B = 5$ ,  $C = 34$ , et pour  $B = 10$ ,  $C = 17$ . Ces trois valeurs conviennent, donnant les configurations  $(-13, 15, 98, 98)$ ,  $(-13, 18, 47, 50)$ ,  $(-13, 23, 30, 38)$ .

Pour  $D = 2$ ,  $BC = 173$ ,  $B = 1$  qui ne convient pas. Pour  $D = 3$ ,  $BC = 178 = 2 \times 89$ ,  $B = 2$  qui ne convient pas. Pour  $D = 4$ ,  $BC = 5 \times 37$ ,  $B = 5$  ne convient pas. Pour  $D = 5$ ,  $BC = 194 = 2 \times 97$ ,  $B = 2$  ne convient pas. Pour  $D = 6$ ,  $BC = 205 = 5 \times 41$ ,  $B = 5$  ne convient pas. Pour  $D = 7$ ,  $BC = 2 \times 109$ ,  $B = 2$  ne convient pas. On n'a jamais  $B \geq 2D$ .

On doit avoir  $D \leq 0,58 \times 13 \leq 7$ . Finalement, on trouve quatre solutions.

---

## ***Bibliographie***

[GRA2003] E.L. Graham, J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks, C.H. Yan, *Apollonian circle packings : number theory*, Journal of Number Theory 100, 2003.

[GRA2005] E.L. Graham, J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks, C.H. Yan, *Apollonian Circle Packings : Geometry and Group Theory, I. The Apollonian Group*, Discrete & Computational Geometry, 2005.

[LAG2011] P. Lagarias, *Hyperbolic geometry, Kleinian groups and the Apollonian gasket*, thesis at Queen Mary University of London, 2011.

[NOR2002] S. Northshield, *On Apollonian Circle Packings*, ResearchGate 2002.

[PEL2014] M. Pellicot, *Apollonian Circle Packings*, 2014.

[SAR2009] P. Sarnak, *Integral Apollonian Packings*, MAA Lectures, 1/2009.