Inversion en géométrie
et géométrie de l'inversion

Avant d'aborder l'inversion, nous avons besoin de rappeler quelques notions de base. Puis nous donnerons les propriétés de l'inversion en géométrie, avec de nombreux exemples d'application à l'appui. Enfin nous introduirons la notion de groupe des transformations inversives, où les inversions et les réflexions se rejoignent et se composent.

1. Notions préalables

1.1. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Considérons un cercle de centre C et de rayon R, et un point O extérieur au cercle. Pour toute droite passant par O et coupant le cercle en M et M', on a

$OM\ OM' = \mathbf{OM\ OM'} = OC^2 - R^2$. [1] Cette constante, qui ne dépend pas de la position de la droite sécante, est appelée la puissance de O par rapport au cercle.[2] Elle est aussi égale à OT^2, OT étant tangente au cercle en T (*figure 1*). Lorsque le point O est intérieur au cercle, on a aussi $\mathbf{OM\ OM'} = - OM\ OM' = OC^2 - R^2$.

Finalement, on appelle puissance du point O par rapport au cercle le produit scalaire **OM OM'**. Cette puissance est positive lorsque O est extérieur au cercle, négative lorsqu'il est à l'intérieur, et nulle sur le cercle.

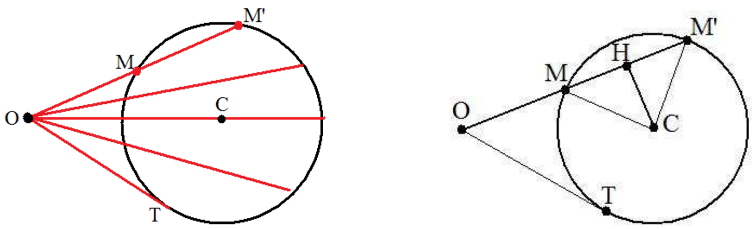


Figure 1 : Puissance du point O par rapport au cercle : $\mathbf{OM\ \ OM'} = OT^2 = OC^2 - R^2$

1.2. Equation d'un cercle

Dans un repère orthonormé, un cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R a pour équation :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - R^2$, où c est la puissance de l'origine O du repère par rapport au cercle. [3]

---

[1] Par définition, le produit scalaire de deux vecteurs, ici **OM OM'**, est un nombre qui est le produit des longueurs OM et OM' des vecteurs par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs, cet angle (**OM**, **OM'**) étant orienté ou non orienté MOM'. Si l'angle est aigu, le produit scalaire est positif, s'il est obtus, le produit scalaire est négatif.

[2] Cela se démontre en intercalant le milieu de H de $[MM']$: $OM\ OM' = \mathbf{OM\ OM'} = (\mathbf{OH} + \mathbf{HM})(\mathbf{OH} + \mathbf{HM'})$ $= OH^2 - HM^2 = (OC^2 - CH^2) - (OM^2 - CH^2) = OC^2 - R^2$. Remarquons que si le point O est intérieur au cercle, le calcul est le même, on a aussi $\mathbf{OM\ OM'} = OC^2 - R^2$, qui est négatif, et $OM\ OM' = R^2 - OC^2$.

[3] $M\ (x, y)$ est sur le cercle de centre C si et seulement si $CM = R$ ou $CM^2 = R^2$, soit :
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. En développant cela donne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. En posant $c = a^2 + b^2 - R^2$, on a la formule cherchée.

Inversement, en partant de l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, celle-ci s'écrit aussi

Inversement toute équation de la forme :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $a^2 + b^2 - c \geq 0$ est l'équation d'un cercle de centre (a, b) et de rayon R tel que $R^2 = a^2 + b^2 - c$.

On en déduit que la puissance d'un point $P(x, y)$ par rapport à un cercle de centre C et de rayon R, d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, est égale à : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$. [4]

1.3. Cercles orthogonaux

On dit que deux cercles sont orthogonaux lorsqu'ils sont sécants, et qu'en leurs deux points d'intersection leurs tangentes sont perpendiculaires (*figure 2*). On a la propriété suivante :

Deux cercles de centres C et C' sont orthogonaux si et seulement si :
$CC'^2 = CT^2 + C'T^2$, T étant un de leurs points d'intersection.[5]

Cela signifie aussi que la puissance du point C par rapport au cercle de centre C' est égale à CT^2 ou encore que la puissance du point C' par rapport au cercle de centre C est $C'T^2$.

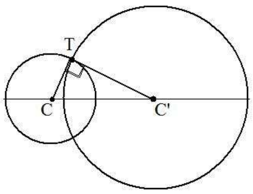


Figure 2 : Cercles orthogonaux

1.4. Ensemble des points M tels que MA / MB = *cte*

a) Soit deux points A et B, et un nombre k positif. Sur la droite (AB), il existe deux points M_1 et M_2 tels que $\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_2A}{M_2B} = k$, sauf pour $k = 1$ où les deux points sont confondus, au milieu de $[AB]$.[6] On dit que les quatre points A, B, M_1, M_2 forment une division harmonique.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 + c = 0$, soit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$. Si $a^2 + b^2 - c$ est négatif, il n'existe aucun point (x, y) vérifiant l'équation. Si $a^2 + b^2 - c \geq 0$, on peut poser $a^2 + b^2 - c = R^2$ et l'on retrouve l'équation d'un cercle.

[4] En effet la puissance du point P est : $PC^2 - R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$.

[5] On utilise le fait que la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon.
Supposons les deux cercles orthogonaux. La tangente au cercle C est perpendiculaire au rayon CT, et comme la tangente au cercle C' est aussi perpendiculaire, celle-ci passe par C. De même la tangente au cercle C passe par C'. Le triangle $CC'T$ est rectangle en T, et d'après le théorème de Pythagore, $CC'^2 = CT^2 + CT'^2$.
Inversement, si l'on a $CC'^2 = CT^2 + CT'^2$, le triangle $CC'T$ est rectangle en T, la droite $(C'T)$ perpendiculaire à (CT) est tangente au cercle de centre C, et de même (CT) est tangente au cercle C'. Ces tangentes étant perpendiculaires, les cercles sont orthogonaux.
On en déduit aussi que $CC'T$ rectangle équivaut à CT^2 = puissance de C par rapport au cercle de centre C'.

[6] On cherche d'abord un point M_1 sur $[AB]$. On a $\mathbf{M_1A} = -k\,\mathbf{M_1B}$, ou $\mathbf{M_1A} + k\mathbf{M_1B} = \mathbf{0}$, ce qui signifie que M_1 est le barycentre de $(A, 1)$, (B, k). On vient de trouver un point. Puis on cherche M_2 hors de $[AB]$, il est tel que $\mathbf{M_1A} = k\,\mathbf{M_1B}$, ou $\mathbf{M_1A} - k\mathbf{M_1B} = \mathbf{0}$, ce qui signifie que M_2 est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -k)$, qui existe pour $k \neq 1$. On trouve un deuxième point sauf pour $k = 1$.

Introduisons la notion de birapport de quatre points alignés A, B, C, D. Il s'agit de $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$. Dans le cas présent de quatre points M_1, M_2, A, B qui forment une division harmonique on a $\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} \div \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} = -1$. Nous retrouverons plus loin cette notion de birapport dans un contexte plus large.

b) Plaçons-nous maintenant dans le plan. L'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$ avec $k \geq 0$, est le cercle dont un diamètre a pour extrémités les points M_1 et M_2 déjà trouvés, lorsque k est différent de 1 (*figure 3*), ou la droite médiatrice de [AB] lorsque $k = 1$.[7] Lorsque k est inférieur à 1, le cercle entoure le point (appelé A sur la *figure 3*) situé à gauche de la médiatrice de [AB], et lorsqu'il est supérieur à 1, il entoure le point situé à droite.

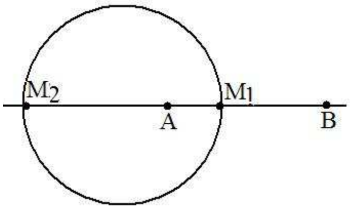


Figure 3 : Cercle décrit par les points M tels que MA / MB = cte. Les points A, B, M_1, M_2 forment une division harmonique (avec un birapport égal à –1).

1.5. Faisceaux de cercles et axe radical

1.5.1. Faisceau de cercles à points limites

Reprenons les cercles qui sont le lieu des points M tels que MA / MB = k. Pour chaque valeur de k, nombre positif ou nul, on trouve un cercle, même dans les cas limites : on peut considérer les deux points A et B comme des cercles de rayon nul, obtenus pour $k = 0$ et k infini. La médiatrice de [AB], pour $k = 1$, peut aussi être considérée comme un cercle de la famille, comme limite d'un cercle de rayon infini.

Lorsque le nombre k varie de 0 à l'infini, on trouve une infinité de cercles dont les centres sont sur (AB) et dont les extrémités des diamètres sont en division harmonique avec les points A et B. Ces cercles forment ce que l'on appelle un faisceau de cercles à points limites A et B (*figure 4*).

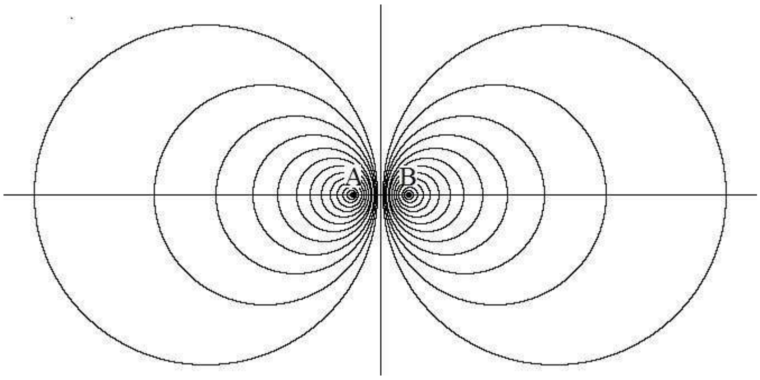


Figure 4 : Faisceau de cercles avec ses deux points limites A et B.

---

[7] $MA / MB = k$ s'écrit $MA = k\, MB$, ce qui équivaut à $MA^2 = k^2\, MB^2$, ou $\mathbf{MA}^2 = k^2\, \mathbf{MB}^2$, soit $(\mathbf{MA} + k\,\mathbf{MB})(\mathbf{MA} - k\,\mathbf{MB}) = 0$. En introduisant les points M_1 et M_2 précédemment trouvés comme étant les barycentres de (A, 1), (B, k) et de (A, 1), (B, – k), la formule devient $\mathbf{MM}_1\, \mathbf{MM}_2 = 0$, ce qui signifie que l'angle M_1MM_2 est droit, et que M décrit le cercle de diamètre [$M_1\, M_2$].

1.5.2. Une propriété de la division harmonique

Utilisons maintenant une propriété caractéristique de la division harmonique :

> Quatre points A, B, M_1, M_2 forment une division harmonique, soit $\dfrac{M_1A}{M_1B} = \dfrac{M_2A}{M_2B}$ $(\neq 1)$, si et seulement si :
>
> $\mathbf{CM}_1\ \mathbf{CM}_2 = CA^2$, C étant le milieu de $[AB]$,[8] ce qui s'écrit aussi $CM_1\ CM_2 = CA^2$, avec M_1 et M_2 tous deux du même côté de C sur (AB).

En prenant C' milieu de $[M_1M_2]$, on a aussi $C'A\ C'B = CM_1^{\ 2}$. Ainsi chaque cercle de centre C' et de rayon R appartenant à un faisceau de cercles à points limites A et B est tel que $C'A \times C'B = R^2$.

Cette relation signifie aussi que les cercles de diamètre $[AB]$ et $[M_1M_2]$ sont orthogonaux (les tangentes en leurs points d'intersection sont perpendiculaires), puisque la puissance du centre C du premier cercle par rapport au second cercle est égale à son rayon au carré CA^2 (*figure 5*). Ainsi tous les cercles du faisceau à points limites A et B sont orthogonaux au cercle de diamètre $[AB]$.

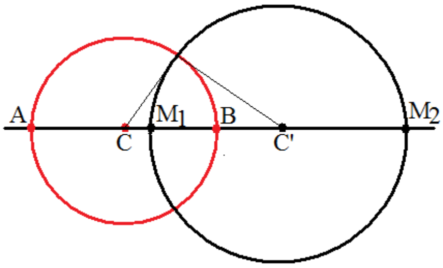


Figure 5 : Les cercles de centres C et C' et de rayons R et R' sont orthogonaux lorsque $CM_1\ CM_2 = CA^2 = R^2$. Et l'on a aussi $C'A \times C'B = R'^2$.

1.5.3. Cercles orthogonaux à un faisceau de cercles à points limites

Ce qui précède se généralise. Prenons maintenant un cercle dont le centre K se trouve sur la médiatrice de $[AB]$ et qui passe par les deux points limites A et B du faisceau. Un tel cercle, comme dans le cas particulier du cercle précédent centré en C, est orthogonal au cercle de diamètre $[M_1\ M_2]$ de centre J, les quatre points A, B, M_1, M_2 formant une division harmonique (*figure 6*).

En effet, la division harmonique A, B, M_1, M_2 signifie aussi bien
$\dfrac{M_1A}{M_1B} = \dfrac{M_2A}{M_2B}$ que $\dfrac{AM_1}{AM_2} = \dfrac{BM_1}{BM_2}$.

On avait déjà $\mathbf{CM}_1\ \mathbf{CM}_2 = CA^2$. On a aussi bien $\mathbf{JA}\ \mathbf{JB} = JM_1^{\ 2}$. Cela signifie que la puissance du point J par rapport au cercle de centre K est égale au rayon du cercle au carré $JM_1^{\ 2}$. Cela prouve que les deux cercles sont orthogonaux.

---

[8] On a vu que par définition d'une division harmonique, M_1 est le barycentre de $(A, 1)$, (B, k) et M_2 celui de $(A, 1)$, $(B, -k)$ pour $k \neq 1$. Cela signifie aussi bien, pour le produit scalaire $\mathbf{CM_1}\ \mathbf{CM_2}$:

$$\mathbf{CM_1}\,\mathbf{CM_2} = \frac{\mathbf{CA} + k\,\mathbf{CB}}{1+k}\ \frac{\mathbf{CA} - k\,\mathbf{CB}}{1-k} = \frac{CA^2 - k^2CB^2}{1-k^2} = \frac{(1-k^2)CA^2}{1-k^2} = CA^2$$

Ainsi tout cercle centré sur la médiatrice de [*AB*] et passant par les points *A* et *B* est orthogonal à un cercle du faisceau à points limites *A* et *B*. Finalement tout cercle passant par *A* et *B* est orthogonal à tout cercle du faisceau à points limites *A* et *B*.

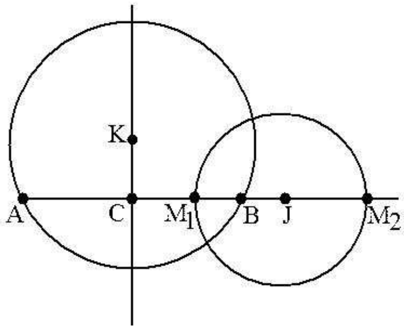


Figure 6 : Cercles orthogonaux, l'un centré sur la médiatrice de [*AB*], l'autre de diamètre [$M_1\ M_2$].

1.5.4. Faisceau de cercles à points de base

On appelle faisceau de cercles à points de base *A* et *B* l'ensemble des cercles passant par ces deux points *A* et *B*. On dispose alors de la propriété suivante, illustrée sur la *figure 7* :

> Lorsque l'on a deux faisceaux de cercles, l'un ayant comme points limites *A* et *B*, et l'autre ayant comme points de base ces mêmes points, chaque cercle de l'un est orthogonal à chaque cercle de l'autre.

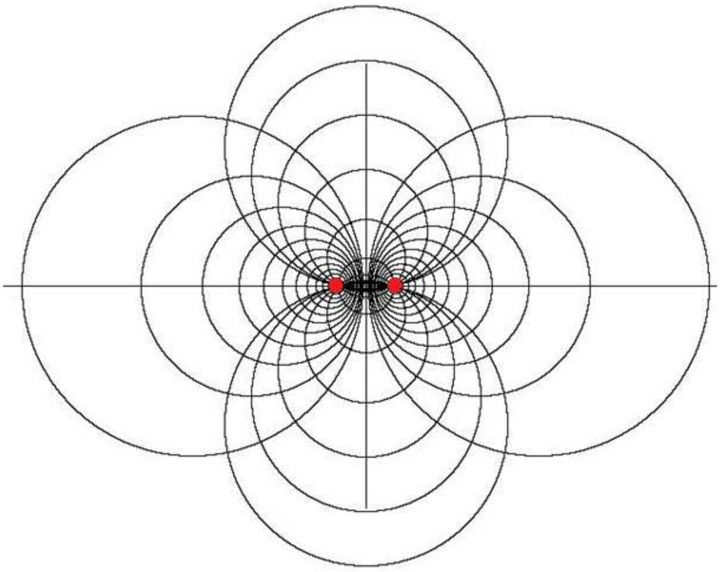


Figure 7 : Deux faisceaux de cercles orthogonaux.

1.5.5. Axe radical de deux cercles

Soit deux cercles non concentriques (C) et (C') de centre C et C' et de rayon R et R'. L'ensemble des points M qui ont la même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite perpendiculaire à (CC'). On l'appelle l'axe radical des deux cercles.

Dans un repère orthonormé où les équations des deux cercles sont
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$, l'équation de l'axe radical est :
$2(a - a')x + 2(b - b')y + c' - c = 0.$ [9]

[9] Utilisons la formule donnant la puissance d'un point par rapport à un cercle. Un point $M(x, y)$ a même puissance par rapport aux cercles (C) et (C') si et seulement si :
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$, soit

On distingue trois cas de figure (*figure 8*) :

- les deux cercles n'ont pas de point commun. La puissance de chaque point de l'axe radical par rapport aux deux cercles est toujours positive.
- les deux cercles sont tangents et l'axe radical est leur tangente commune.
- les deux cercles sont sécants en deux points et l'axe radical passe par ces deux points (en ces points la puissance par rapport aux deux cercles est la même, plus précisément elle est nulle).

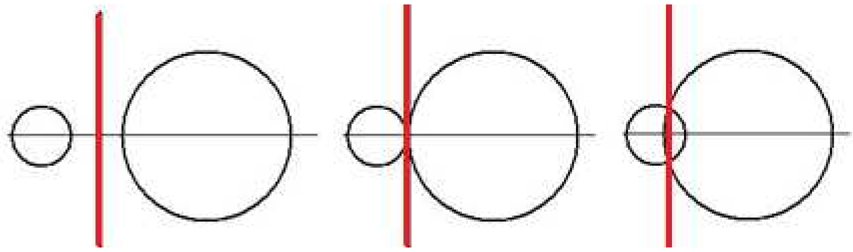


Figure 8 : Deux cercles et leur axe radical, dans les trois cas possibles

1.5.6. Les trois types de faisceaux de cercles, et leur caractérisation par deux cercles

On a déjà rencontré deux types de faisceaux, celui ayant deux points limites et celui ayant deux points de base. Le troisième type est celui où les deux points de base sont confondus, c'est-à-dire l'ensemble des cercles ayant tous la même tangente en un même point. Nous allons maintenant voir que la connaissance de deux cercles non concentriques suffit à déterminer un faisceau de cercles unique dont ils sont deux éléments. On dit qu'ils engendrent le faisceau de cercles (*figure 9*). Distinguons trois cas de figure.

- Les deux cercles sont sécants en A et B. Alors tous les cercles passant par A et B forment un faisceau de cercles à points de base, tous centrés sur la médiatrice de [AB]. Pris deux à deux, tous ces cercles ont même axe radical (AB).

- Les deux cercles sont tangents en un point A. Leur tangente commune est aussi leur axe radical D. Alors tous les cercles tangents en A à cette droite D forment un faisceau de cercles tangents, et l'axe radical de deux cercles quelconques de ce faisceau est cette tangente D.

- Les deux cercles n'ont pas de point commun. Appelons D leur axe radical. Celui-ci coupe la ligne des centres en un point C. Puisque ce point a la même puissance par rapport aux deux cercles, les tangentes menées à partir de ce point C aux deux cercles ont même longueur ($CT = CT'$), et le cercle de centre C et de rayon CT est orthogonal aux deux cercles. Ce cercle coupe la ligne des centres en deux points A et B. Ces deux cercles points sont nécessairement des cercles du faisceau. Or ces deux points engendrent un faisceau de cercles à points limites (comme on l'a vu, il s'agit de tous les cercles dont les extrémités des diamètres M_1 et M_2 sur (AB) sont en division harmonique avec A et B). Ce faisceau de cercles contient les deux cercles initiaux, et deux cercles quelconques du faisceau ont toujours le même axe radical D, qui est la médiatrice de [AB].

$2(a - a')x + 2(b - b')y + c' - c = 0$. Comme on n'a pas en même temps $a - a' = 0$ ni $b - b' = 0$, puisque les cercles ne sont pas concentriques, on obtient l'équation d'une droite de vecteur normal (orthogonal) $(a - a', b - b')$ qui correspond à la ligne des centres. L'axe radical est bien une droite. Remarquons que si les deux cercles étaient concentriques (et distincts), aucun point ne pourrait avoir la même puissance par rapport à eux deux, dans ce cas il n'existe pas d'axe radical.

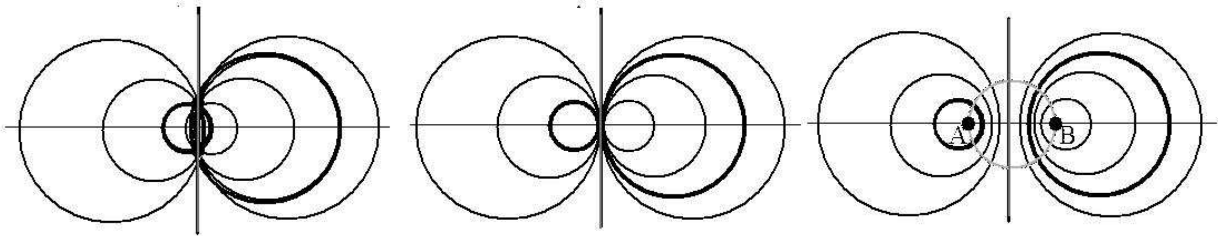


Figure 9 : Les trois types de faisceaux de cercles, avec leurs deux cercles caractéristiques *en gras*.

2. L'inversion comme transformation dans le plan

2.1. Définition d'une inversion

Etant donnés un point O et un nombre positif R, l'inversion ayant pour cercle d'inversion le cercle de centre O et de rayon R fait passer d'un point M (autre que O) à un point M' tel que $OM\ OM' = R^2$ avec M' sur la demi-droite [OM) (*figure 10*). Ainsi, une inversion est caractérisée par un point, le centre O, et par le nombre positif R rayon du cercle d'inversion. On parle aussi d'inversion de centre O et de puissance le nombre positif $k = R^2$, auquel cas $OM\ \ OM' = k$.

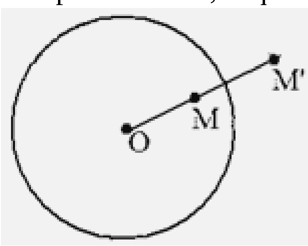


Figure 10 : Inversion faisant passer de M à M'

Le nom d'inversion est associé à la notion d'inverse. Ainsi, dans le plan complexe, l'inversion de centre O et de puissance 1 fait passer de M d'affixe z à M' d'affixe z' en prenant l'inverse, plus précisément celui du conjugué [10]:

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Au lieu d'inversion, on pourrait aussi bien parler de *réflexion* par rapport au cercle de centre O et de rayon R. On connaît la réflexion par rapport une droite D, où un point M est transformé en M' avec la droite D qui est la médiatrice de [MM'], et l'on a $HM = HM'$ (*figure 11*). Ce nom de réflexion reste valable si l'on pratique une inversion avec le point M proche du cercle d'inversion, le point M' est lui aussi proche du cercle, et ce cercle s'apparente, à proximité des points M et M', à une droite perpendiculaire à MM', avec HM sensiblement égal à HM'. [11] Paar extension, l'inversion s'apparente à une réflexion autour d'un cercle.

---

[10] Le nombre complexe z est visualisé par un vecteur **OM**, il peut être défini par son module OM et son argument θ qui est l'angle orienté que fait **OM** avec l'axe des x. Cela peut s'écrire $z = [r, \theta]$. Son inverse $1/z$ est égal à $[1/r, \ -\theta]$. En prenant le conjugué de z, soit $\overline{z} = [r, \ -\theta]$, on a $z' = 1 / \overline{z} = [1/r, \theta]$, d'où $OM' = 1/OM$ et les vecteurs **OM** et **OM'** font le même angle orienté avec l'axe des x. M' est bien l'inverse de M.

[11] En effet, $OM\ OM'$= **OM OM'** = (**OH+HM**)(**OH+HM'**) = R^2 + **OH** (**HM+HM'**) + **HM HM'**.

Avec $OM\ OM' = R^2$, il reste **OH** (**HM+HM'**) = **– HM HM'**, avec **HM HM'** négligeable devant **OH**, d'où **HM + HM'** sensiblement égal à 0. H est quasiment le milieu de [MM'].

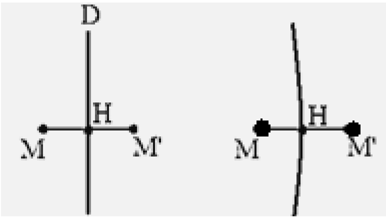


Figure 11 : Réflexion et inversion.

Sous l'effet de l'inversion, tout point extérieur au cercle d'inversion devient un point intérieur et vice-versa. La surface infinie située autour du cercle est transformée en l'intérieur du cercle. Pour tout point situé hors du cercle d'inversion, l'inversion est une transformation contractante.

2.2. Comment construire l'inverse d'un point ?

Si le point *A* est extérieur au cercle d'inversion, on mène à partir de ce point une tangente au cercle, [*AT*], le triangle *ATO* est rectangle, puis on trace la hauteur issue de *T*, soit [*TA'*]. Selon une propriété du triangle rectangle, $OA\ OA' = OT^2$ ($= R^2$), et *A'* est l'inverse de *A* (*figure 12*). On utilise ce même triangle lorsque l'on part d'un point intérieur au cercle d'inversion.

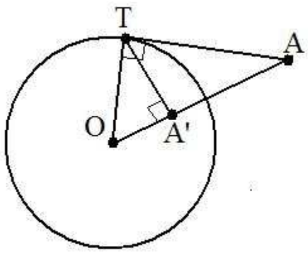


Figure 12 : Construction de *A'* transformé de *A* par l'inversion de cercle de centre *O* et de rayon *OT*.

Notons que le cercle (*C*) de centre *A* et de rayon *AT* est orthogonal au cercle d'inversion, avec [*OT*] tangent au cercle (*C*) (*figure 13*). Ce cercle coupe la droite (*OA*) en deux points *B* et *B*' qui sont aussi inverses par rapport au cercle de centre *O*, puisque la puissance de *O* par rapport à *C* est $OB\ OB' = OT^2 = R^2$. A son tour, *A'* admet pour inverse *O* dans l'inversion de cercle (*C*), puisque grâce au triangle rectangle *ATO* : $AA'\ AO\ = AT^2$.

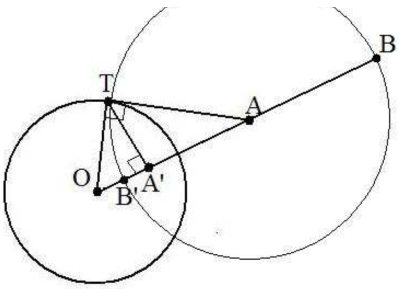


Figure 13 : Inversions de cercles orthogonaux de centre *O* et de centre *A* : $OB\ OB' = OT^2$ et $AA'\ AO = AT^2$.

Prenons maintenant le cercle Γ de diamètre [*AA'*] et de centre *I*. On constate que la puissance de *O* par rapport à ce cercle Γ est justement *OA OA'*, et comme $OA\ OA' = R^2$, elle est égale à OU^2, *U* étant un point d'intersection des deux cercles. On retrouve une propriété caractéristique de deux cercles orthogonaux, comme on l'a vu au *paragraphe 1.3.* (*figure 14*).

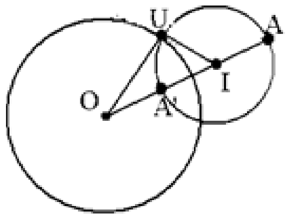


Figure 14 : Orthogonalité du cercle de centre *O* et du cercle de diamètre [*AA'*], *A'* étant l'inverse de *A* dans l'inversion de cercle de centre *O*.

Cela nous donne un autre moyen de construire l'inverse *A'* d'un point *A* donné par rapport au cercle de centre *O* et de rayon *R*. Il suffit de prendre un point quelconque *T* sur le cercle d'inversion, et de construire le cercle orthogonal passant par *A* et par *T*, grâce à la construction de son centre *K* comme indiqué sur la *figure 15*. Le point *A'* est à l'intersection de ce cercle orthogonal et de la droite (*OA*).

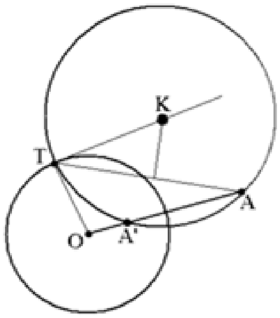


Figure 15 : Autre construction de *A'* transformé de *A* par l'inversion de cercle de centre O.

En prenant un autre point *T'* et en traçant un deuxième cercle orthogonal passant par *A* et *T'*, celui-ci passe aussi par *A'*. On en déduit que si deux cercles sont orthogonaux au cercle d'inversion de centre *O*, et qu'ils se coupent en deux points *A* et *A'*, alors *A'* est l'inverse de *A* : *O*, *A*, *A'* sont alignés et $OA\ OA' = R^2$ (*figure 16*).

Deux points *A* et *A'* étant inverses dans une inversion de cercle (*C*), alors tout cercle passant par *A* et *A'* est orthogonal à (*C*).

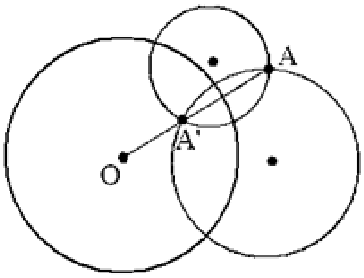


Figure 16 : Deux cercles orthogonaux au cercle d'inversion de centre *O*, avec leurs points d'intersection *A* et *A'* qui sont inverses l'un de l'autre.

2.3. Propriétés de l'inversion

2.3.1. L'inversion est une involution

Tout point *M* autre que le centre d'inversion *O* admet un inverse *M'* et le point *M'* peut être tout point du plan sauf le point *O*. L'inversion qui fait passer de *M* à *M'* fait aussi passer de *M'* à *M*. L'inversion est une involution, c'est-à-dire qu'elle est inversible et que son inverse est elle-même. Il s'agit d'une bijection sur le plan auquel on a enlevé le point *O*.

On verra plus tard que, pour harmoniser la situation, on adjoindra au plan un *point* noté ∞, tel que O soit transformé en ∞ et ∞ en O. Cela reviendra à se placer dans le plan complexe complété, soit $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, et l'inversion deviendra une bijection à l'échelle de ce plan.

2.3.2. Formules de l'inversion

Prenons un repère orthonormé. Si le centre de l'inversion est aussi l'origine O du repère, la relation faisant passer de $M(x, y)$ à $M'(x', y')$, avec $OM\ \ OM' = R^2$ s'écrit :[12]

$$\begin{cases} x' = \dfrac{R^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{R^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Les formules de passage inversées, avec (x, y) en fonction de (x', y') sont identiques.

Supposons maintenant le centre C de l'inversion quelconque. En complexes, avec C d'affixe c, $z - c$ est l'affixe de **CM** et $z' - c$ celui de **CM'**. On a alors

$$\boxed{z' - c = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{c}}}$$

Cette relation signifie justement que les vecteurs **CM** et **CM'** font le même angle avec l'axe des x, et que le produit de leurs modules vaut R^2, ce qui est la définition de l'inversion. En réels, avec C (xc, yc), cela devient après calculs :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{R^2 (x - xc)}{CM^2} + xc \\ y' = \dfrac{R^2 (y - yc)}{CM^2} + yc \end{cases} \quad \text{avec } CM^2 = (x - xc)^2 + (y - yc)^2\ ,\ \ M \neq C$$

2.3.3. Lien entre inversion et division harmonique

Soit deux points A et B et un nombre k positif. On a vu (*cf. paragraphe 1.4.*) qu'il existe deux points M vérifiant $MA \,/\, MB = k$ et situés sur la droite (AB), soit M_1 et M_2 , les quatre points M_1, M_2, A, B formant une division harmonique : $M_1A \,/\, M_1B = M_2A \,/\, M_2B$.

Avec C milieu de $[AB]$, la relation précédente s'écrit aussi, de façon équivalente $CM_1\ CM_2 = CA^2$, avec M_1 et M_2 tous deux du même côté de C sur (AB). Autrement dit les points M_1 et M_2 sont inverses par l'inversion dont le cercle a pour diamètre $[AB]$ (*figure 17*).

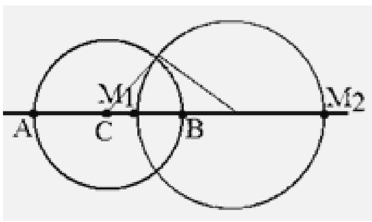


Figure 17 : Inversion associée à la division harmonique M_1, M_2, A, B.

[12] En notant a l'angle orienté (**Ox**, **OM**), on a : $\cos a = x \,/\, OM$, ou $OM = x \,/ \cos a$, et la relation $OM\ \ OM' = R^2$ devient : $(x / \cos a)(x'/\cos a) = R^2$, soit $x\, x' = R^2 \cos^2 a = R^2 x^2 / OM^2$, $x' = R^2 x / OM^2$.

2.3.4. Inverse d'une droite

Premier cas : la droite passe par le centre d'inversion *C*. A cause de l'alignement de *C*, *M* et de son transformé *M'* par l'inversion, cette droite reste globalement invariante, en lui enlevant le point *C*.

Deuxième cas : la droite ne passe pas par *C*. Prenons *C* comme origine du repère orthonormé.[13] La droite a son équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec *a* et *b* non nuls en même temps, et *c* différent de 0. En utilisant les formules de passage de *M'* à *M*, avec $M' \neq C$, soit $x = R^2x'/(x'^2 + y'^2)$ et $y = R^2y'/(x'^2 + y'^2)$, l'équation de la droite devient :

$$x'^2 + y'^2 + (aR^2 / c)\, x' + (bR^2 / c)\, y' = 0.$$

Il s'agit de l'équation du cercle de centre $(\frac{-aR^2}{2c}, \frac{-bR^2}{2c})$, et de rayon $\frac{R^2\sqrt{a^2+b^2}}{2|c|}$, passant par le point *C*, centre de l'inversion, mais que l'on enlève.

Nous avons aussi besoin des formules lorsque le centre d'inversion $C(xc, yc)$ n'est pas confondu avec l'origine du repère. La droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec *a* et *b* non nuls tous les deux et $a\, xc + b\, yc + c \neq 0$ puisque la droite ne passe pas par *C*. Faisons un changement de repère par translation avec *C* comme nouvelle origine. Pour un point *M* de coordonnées (x, y) dans l'ancien repère et (X, Y) dans le nouveau, la formule de passage est $x = xc + X$, $y = yc + Y$. L'équation de la droite devient :

$$aX + bY + a\, xc + b\, yc + c = 0.$$

On sait, grâce à ce qui précède, que dans ce nouveau repère d'origine *C* cette droite devient le cercle de centre :

$$(\frac{-aR^2}{2(a\ xc+b\ yc+c)}, \frac{-bR^2}{2(a\ xc+b\ yc+c)}) \text{ et de rayon } \frac{R^2\sqrt{a^2+b^2}}{2|a\ xc+b\ yc+c|}.$$

En revenant au repère initial, on obtient le cercle de centre :

$$(xc - \frac{aR^2}{2(a\ xc+b\ yc+c)}, yc - \frac{bR^2}{2(a\ xc+b\ yc+c)})$$

et de rayon $\frac{R^2\sqrt{a^2+b^2}}{2|a\ xc+b\ yc+c|}$ (*figure 18*).

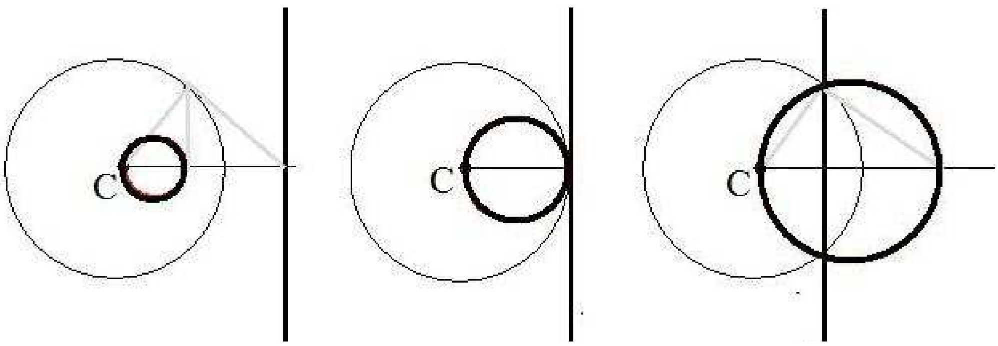


Figure 18 : Cercle inverse d'une droite ne passant pas par le centre d'inversion *C*, dans les trois cas de figure.

[13] Nous avons choisi une méthode de démonstration calculatoire, plutôt que purement géométrique. Cette méthode est lourde, mais elle a l'avantage de donner des formules sur les transformés d'une droite ou d'un cercle, facilitant une programmation éventuelle.

2.3.5. Inverse d'un cercle

On distingue deux cas suivant que le cercle passe ou non par le centre d'inversion.

- Le cercle (de rayon non nul) passe par le centre d'inversion.

Supposons d'abord que le centre d'inversion C est l'origine du repère. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$, avec a et b non nuls en même temps, puisque son centre I est (a, b) autre que C. Son rayon r est tel que $r^2 = a^2 + b^2$. En utilisant les formules donnant (x, y) par rapport à (x', y') on obtient l'équation de la courbe transformée : $2a\,x' + 2b\,y' - R^2 = 0$. Il s'agit d'une droite puisque a et b sont non nuls en même temps.

L'équation de cette droite est $a'x + b'y + c' = 0$ avec $a' = 2a$, $b' = 2b$, $c' = -R^2$. Cette droite, de vecteur normal (ou perpendiculaire) (a, b) est perpendiculaire à (CI).

Prenons maintenant le centre d'inversion C (xc, yc) quelconque dans le repère, et considérons un cercle de centre I (a, b) et de rayon r. Son équation est :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$,

et l'on impose que le cercle passe par C, soit $CI^2 = r^2$, ce qui se traduit par la contrainte $(xc - a)^2 + (yc - b)^2 - r^2 = 0$. Prenons comme nouveau repère parallèle au premier celui ayant C comme origine, d'où la formule de passage : $x = X + xc$, $y = Y + yc$.

Le cercle a comme nouvelle équation $X^2 + Y^2 - 2AX - 2BY + C = 0$ avec
$A = a - xc$, $B = b - yc$, $C = 0$. On en déduit son image qui est la droite d'équation $A'X + B'Y + C' = 0$, avec $A' = 2A$, $B' = 2B$, $C' = -R^2$. En revenant au repère initial, cette droite a pour équation :

$a'x + b'y + c' = 0$,
avec
$a' = 2(a - xc)$, $b' = 2(b - yc)$, $c' = -2a\,xc - 2b\,yc + 2xc^2 + 2yc^2 - R^2$.

- Le cercle ne passe pas par le centre d'inversion.

Supposons d'abord le centre d'inversion situé à l'origine du repère. Prenons un cercle ne passant pas par ce point, de centre $K(a, b)$ et de rayon r. Son équation s'écrit $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$. Sous l'effet de l'inversion, on obtient l'équation :

$x'^2 + y'^2 - 2(aR^2 / c)x' - 2(bR^2 / c)y' + R^4 / c = 0$. Il s'agit d'un cercle de centre (a', b') avec $a' = a R^2 / c$, $b' = bR^2 / c$, avec $c' = R^4 / c$, soit un rayon $r' = R^2 r / |c|$.

Prenons maintenant le centre d'inversion C quelconque, de coordonnées xc et yc dans le repère, avec R comme rayon du cercle. En procédant comme auparavant, le cercle à inverser a pour équation :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$, ce cercle ne passant pas par C, soit $KC^2 \neq r^2$. Son centre est (a, b) et son rayon r. En procédant comme auparavant, on aboutit au cercle image d'équation

$x'^2 + y'^2 - 2a'x' - 2b'y' + c' = 0$, avec son centre de coordonnées :

$$a' = \frac{(a - xc)R^2}{(xc - a)^2 + (yc - b)^2 - r^2} + xc\ ,\quad b' = \frac{(b - yc)R^2}{(xc - a)^2 + (yc - b)^2 - r^2} + yc$$

et son rayon :

$$r' = \frac{R^2 r}{\left|(xc - a)^2 + (yc - b)^2 - r^2\right|}.$$

On trouvera sur la *figure 19* quelques résultats d'application de ces formules, dans les trois cas de figure possibles (cercle initial sécant, ou tangent, ou non sécant avec le cercle d'inversion). On constatera que les deux cercles inverses l'un de l'autre ne sont jamais l'un à l'intérieur de l'autre, et qu'ils ont des tangentes communes passant par le centre d'inversion (on verra plus bas que l'inversion conserve les contacts).

Ces résultats issus de calculs à propos de droites et de cercles servent essentiellement à la programmation. En même temps, nous avons montré que toute droite ou cercle a comme inverse un cercle ou une droite (à un point près parfois).

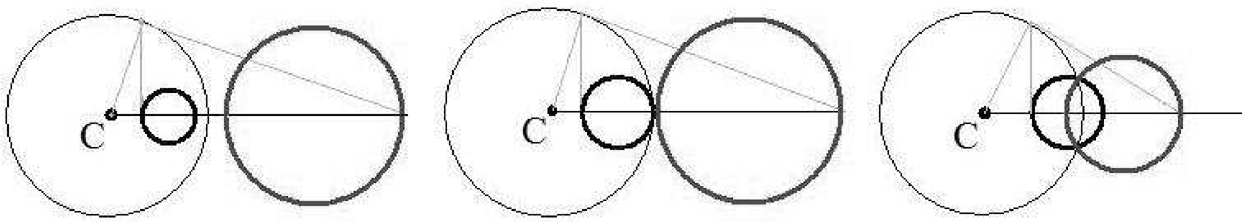


Figure 19 : Cercle et son cercle inverse sous l'effet de l'inversion de cercle centré en *C*, dans tous les cas de figure.

2.3.6. Résumé des principales propriétés de l'inversion

- L'inversion transforme une droite ou cercle en droite ou cercle (en enlevant le centre d'inversion si celui-ci se trouve sur une de ces courbes).

- L'inversion est anti-conforme : elle transforme un angle orienté en son opposé. Notamment elle transforme un angle droit en angle droit. Ainsi elle conserve le contact : deux courbes tangentes en un point sont transformés en courbes elles aussi tangentes.

- Excepté le cercle d'inversion (qui est invariant point par point), les seuls cercles qui restent globalement invariants sont les cercles orthogonaux au cercle d'inversion.

- Propriété de symétrie : On considère une inversion de cercle (*C*) faisant passer d'un point *A* à un point *A*'. Soumettons cette figure formée par le cercle (*C*) et les points *A*, *A*' à une inversion de cercle (Γ). Celle-ci transforme le cercle (*C*) en un cercle (*C*'), et les points *A* et *A*' en *B* et *B*'. Alors ces points *B* et *B*' sont à leur tour inverses dans l'inversion de cercle (*C*').

Nous connaissons déjà la première propriété.

Donnons la preuve de la deuxième propriété, à propos de l'inversion anti-conforme : Considérons deux droites se coupant en un point *A* autre que le centre d'inversion *O*, et censées représenter les tangentes à deux courbes se coupant en *A*. Sous l'effet de l'inversion, ces deux droites sont transformées en deux cercles passant par le centre *O* de l'inversion (*figure 20*). Les deux tangentes en *O* à ces deux cercles sont parallèles aux deux droites et forment le même angle. L'inverse *A*' du point *A* est l'autre point d'intersection des deux cercles. Par symétrie par rapport à la ligne des centres de ces deux cercles, les tangentes en *A*' aux cercles forment un angle opposé à celui des deux droites initiales.

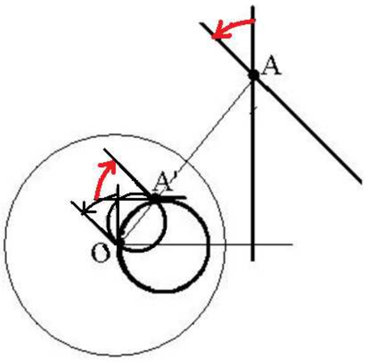


Figure 20 : Angle transformé en son opposé.

La troisième propriété sera démontrée plus loin.

Il reste à prouver la quatrième propriété dite de symétrie : Pour *A* et *A'* inverses dans l'inversion de cercle (*C*), prenons deux cercles passant par *A* et *A*' et orthogonaux au cercle (*C*). L'inversion de cercle (*Γ*) les transforme en deux cercles orthogonaux à (*C*'), à cause de la conservation des angles au signe près. Ces deux cercles se coupent en *B* et *B*' images de *A* et *A*' par l'inversion (*Γ*). (*figure 21*). Comme ces cercles sont globalement invariants par l'inversion de cercle (*C*'), le point *B* a pour transformé *B*' par l'inversion de cercle (*C*').

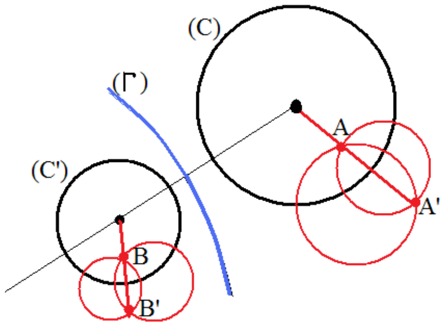


Figure 21 : Les points *A* et *A'* inverses dans l'inversion de cercle (*C*) devienntnt, par l'inversion de cercle (*Γ*). les points *B* et *B'* inverses dans l'inversion de cercle (*C'*).

2.3.7. Transformation de surfaces

Considérons une courbe fermée et donnons-lui un sens de parcours. Sous l'effet d'une inversion elle est transformée en une courbe avec un certain sens de parcours induit par celui donné à la courbe initiale. Comme l'inversion change le signe des angles orientés, la surface située à gauche de la courbe initiale lorsqu'on la parcourt est transformée en la surface située à droite de la courbe image. Prenons quelques cas simples.

- Une droite ne passant par le centre d'inversion est transformée en cercle. Le demi-plan situé du côté qui ne contient pas le centre d'inversion est transformé en l'intérieur du cercle image (*figure 22 à gauche*).

- Un cercle ne passant pas par le centre d'inversion est transformé en cercle. En donnant un sens de parcours au cercle initial, on vérifie que l'intérieur du cercle est transformé en l'intérieur du cercle image, lorsque le centre d'inversion n'est pas situé à l'intérieur du cercle initial. Sinon, l'intérieur devient l'extérieur (*figure 22 à droite*).

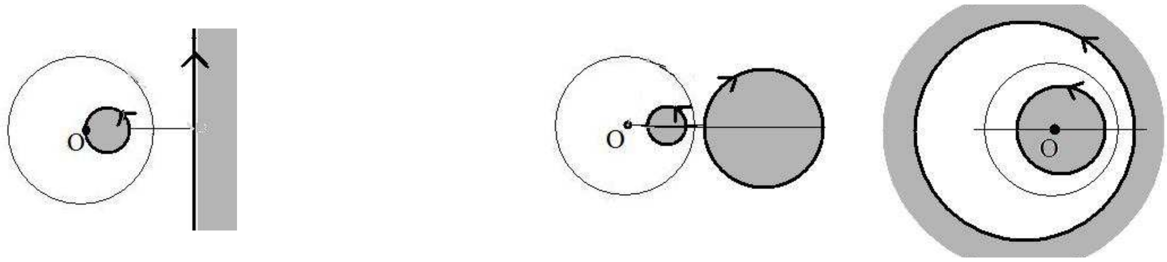


Figure 22 : *A gauche* demi-plan transformé en disque. *A droite* transformation de surfaces circulaires.

Nous pouvons maintenant prouver la troisième propriété donnée au *paragraphe 2.3.6.* : Supposons que l'on ait un cercle globalement invariant (et autre que le cercle d'inversion). Le cercle d'inversion (*C*) sépare le plan en deux surfaces, l'une *S* extérieure et l'autre *S'* intérieure. On a vu que tout cercle situé dans une de ces surfaces a pour transformé un cercle situé dans l'autre, même dans le cas où le cercle est tangent. De tels cercles en peuvent pas rester invariants. Un cercle globalement invariant coupe nécessairement le cercle d'inversion (*C*) en deux points *T* et *T*'. Il ne peut pas non plus contenir *O* (sinon deux points inverses sur ce cercle seraient de part et d'autre de *O*). Le fait de ne pas contenir *O* provoque un changement du sens de parcours par passage à l'inverse. Prenons un vecteur **V** sur la tangente en *T* à ce cercle, et **V'** sur la tangente en *T* au cercle d'inversion. L'angle orienté entre les deux vecteurs est (**V**, **V'**) $[2\pi]$. Sous l'effet de l'inversion, cet angle est transformé en

$(\mathbf{V}, -\mathbf{V'}) = (\mathbf{V}, \mathbf{V'}) + \pi\ [2\pi]$. Et l'on sait que l'inversion change le sens des angles.

On en déduit que :

$(\mathbf{V}, \mathbf{V'}) + \pi = -\ (\mathbf{V}, \mathbf{V'})\ [2\pi]$, $2\,(\mathbf{V}, \mathbf{V'}) = \pi\ \ [2\pi]$, $\quad (\mathbf{V}, \mathbf{V'}) = \pi/2\ \ [\pi]$.

Ainsi tout cercle globalement invariant doit être orthogonal au cercle d'inversion.

Inversement, tout cercle orthogonal Γ au cercle d'inversion est globalement invariant. En effet, prenons un des points *T* d'intersection des deux cercles, et menons un sécante passant par le centre d'inversion *O* , qui coupe le cercle Γ en *A* et *A*'. La puissance de *O* s'écrit $OA\ OA' = OT^2$ ($= R^2$), d'où *A*' est l'inverse de *A*. Le cercle Γ passant par les trois points *T*, *A*, *A'* est transformé en un cercle passant aussi par ces trois points. Il est bien globalement invariant (*figure 23*).

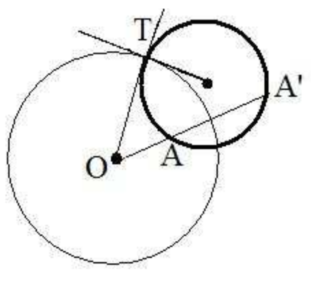


Figure 23 : Cercle orthogonal globalement invariant.

2.3.8. Inverse d'un faisceau de cercles

- Si le faisceau est à points de base *A* et *B*, avec chaque cercle du faisceau passant par ces deux points, une inversion transforme ces deux points en *A'* et *B'*, et les cercles sont transformés en cercles passant par *A'* et *B'* images de *A* et *B*. On obtient encore un faisceau de cercles à points de base. Notons que si le cercle d'inversion est centré en *A*, les cercles deviennent des droites, et l'on obtient un faisceau de droites.

- Si le faisceau est formé de cercles tangents en *A*, l'inversion transforme *A* en *A'*, et la tangente commune *D* devient un cercle *D'* passant par *A'*. Comme l'inversion conserve le contact, les cercles du faisceau deviennent des cercles tous tangents en *A'* au cercle *D'*, ainsi leurs centres sont tous sur une même droite perpendiculaire à la tangente en *A'* à *D'*. On obtient un faisceau de cercles tangents. Remarquons que si le centre de l'inversion est en *A*, les inverses des cercles deviennent des droites toutes parallèles entre elles, et perpendiculaires à la ligne des centres initiale.

- Si l'on a un faisceau à points limites *A* et *B*, on sait qu'il est orthogonal au faisceau à points de base *A* et *B*. L'inversion transforme ces deux points en *A'* et *B'*. On a vu que le faisceau (orthogonal) à points de base devient le faisceau à points de base *A'* et *B'*. Comme l'inversion préserve les angles droits, le faisceau à points limites devient le faisceau orthogonal au faisceau à points de base *A'* et *B'*. Il s'agit donc du faisceau à points limites *A'* et *B'*.

Mais il existe un cas spécial, celui où le cercle d'inversion est centré en un point limite, par exemple *A*. Le point *A* est alors envoyé à l'infini, et le point *B* en *B'*. Le cercle de diamètre [*AB*], dont on sait qu'il est orthogonal à tous les cercles du faisceau, est transformé en une droite *D'* passant par *B'* et perpendiculaire à (*AB*). Dans l'inversion tous les cercles restent orthogonaux à cette droite *D'*. Leurs centres sont donc situés sur elle. D'autre part, les centres des cercles du faisceau initial sont tous sur la droite (*AB*) et les cercles inverses ont aussi leurs centres sur la droite (*AB*), où se trouve *B'*. Comme les centres doivent être sur cette droite ainsi que sur sa perpendiculaire en *B'*, ils sont tous en *B'*. Le faisceau de cercles initial est transformé en un *faisceau* de cercles concentriques (*figure 24*). Il ne s'agit plus à proprement parler d'un faisceau de cercles, mais si cela peut être considéré comme un cas limite.

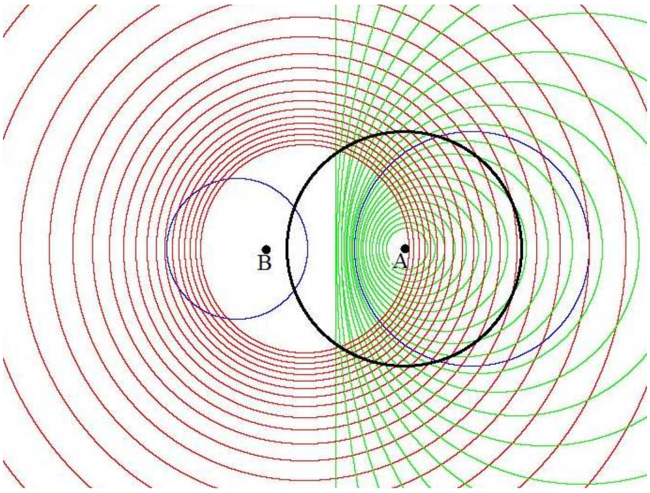


Figure 24 : Les deux cercles initiaux (*en bleu*) génèrent un faisceau à points limites *A* et *B*, quelques cercles du faisceau correspondant (*en vert*) sont tracés sur la partie droite du dessin. Le cercle d'inversion centré sur le point limite *A* est *en noir*, et les cercles inverses de ceux du faisceau initial sont tous concentriques (*en rouge*).

Finalement, sauf dans le cas extrême précédent, un faisceau de cercles est transformé en faisceau de cercles de même nature. Notamment, si le cercle d'inversion est un cercle du faisceau, le faisceau est globalement conservé.

2.3.9. Pôles et polaires

Prenons un point *A* à l'intérieur du cercle d'inversion. Son inverse *A*' est à l'extérieur. La médiatrice de [*AA*'] est appelée la polaire du point *A* (intérieur) par rapport au cercle, et le point *A* est appelé pôle de cette droite. Comme cette droite *D* est le lieu géométrique des centres des cercles passant par *A* et *A*', tout cercle centré sur elle et passant par *A* (et *A*') est orthogonal au cercle d'inversion. Inversement, tout cercle passant par *A* et orthogonal au cercle d'inversion est centré sur cette polaire *D* (et il passe par *A*'). Le centre d'un cercle orthogonal au cercle d'inversion est toujours situé à l'extérieur. La droite polaire est extérieure au cercle.

A chaque point *A* intérieur au cercle d'inversion est associée sa droite polaire située à l'extérieur du cercle (*figure 25*). Inversement, toute droite *D* située à l'extérieur du cercle admet un pôle unique *A*.[14] La relation pôle - polaire est bijective, allant des points intérieurs vers les droites extérieures au cercle d'inversion.

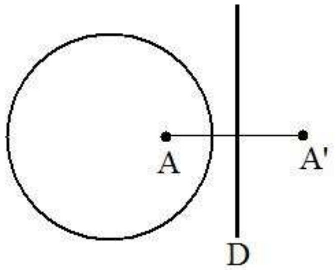


Figure 25 : Un point *A* et sa droite polaire

Il existe un lien entre polaire et faisceau de cercles. En effet, considérons le cercle d'inversion de centre *C* et le point *A* qui lui est intérieur, et que l'on peut considérer comme un cercle point. Ces deux cercles définissent un faisceau de cercles, avec *A'*, l'inverse de *A*, comme deuxième cercle point. *A* et *A'* sont les points limites du faisceau. La médiatrice de [*AA'*], polaire du point *A*, est aussi l'axe radical du faisceau de cercles. Tous les cercles centrés sur cet axe et passant par *A* et *A'* forment le faisceau de cercles orthogonal au premier faisceau.

A partir d'un point *A* intérieur à un cercle, on peut déterminer l'équation de la droite polaire. Pour cela, prenons comme origine du repère *O* le centre du cercle qui va servir pour l'inversion, et donnons-nous un point *A* (*xa*, *ya*) supposé intérieur. Son inverse *A'* a pour coordonnées

$xa' = R^2\, xa \,/\, (xa^2 + ya^2)$, $ya' = R^2\, ya \,/\, (xa^2 + ya^2)$.

On en déduit le milieu *I* (*xi*, *yi*) de [*AA'*]. L'équation de la polaire est :

$xa\,(X - xi) + ya\,(Y - yi) = 0$, ce qui donne après calcul :

$$\boxed{xa\,X + ya\,Y = \frac{xa^2 + ya^2 + R^2}{2}}$$

2.3.12. Rayons d'un cercle et leurs inverses

Considérons une inversion de cercle centré en *C*. Prenons un cercle Γ de centre *I*, et traçons plusieurs rayons de ce cercle. Sous l'effet de l'inversion, le cercle Γ est transformé en un cercle Γ', son centre devient un point *I'*, ses rayons deviennent des arcs de cercles passant par *I'* et orthogonaux au cercle Γ'. Les cercles entiers correspondant à ces rayons passent par les points *C* et *I '*, ils forment un faisceau de cercles sécants en ces deux points (*figure 26*). Leur droite des centres, qui est la médiatrice de [*CI'*], est aussi la polaire du point *I'* par rapport au cercle Γ'. [15]

[14] Voici comment le construire. On part d'une droite *D* extérieure au cercle (*C*) d'inversion de centre *C*. La projection de *C* sur cette droite donne le point *C*'. On construit le cercle de centre *C*' et orthogonal au cercle d'inversion (*C*) par le procédé habituel. Ce cercle coupe la droite (*CC'*) en un point *A* intérieur au cercle (*C*) et *A*' extérieur. *A* est le pôle de la droite *D*.

[15] Le faisceau à points de base *I'* et *C* a pour faisceau orthogonal le faisceau contenant le cercle Γ' ainsi que les cercles points limites *C* et *I'*. On sait que ces deux points limites sont inverses l'un de l'autre par une inversion dont le cercle est un cercle du faisceau, notamment Γ'. Le point *I'* a bien pour polaire la médiatrice de [*I'C*].

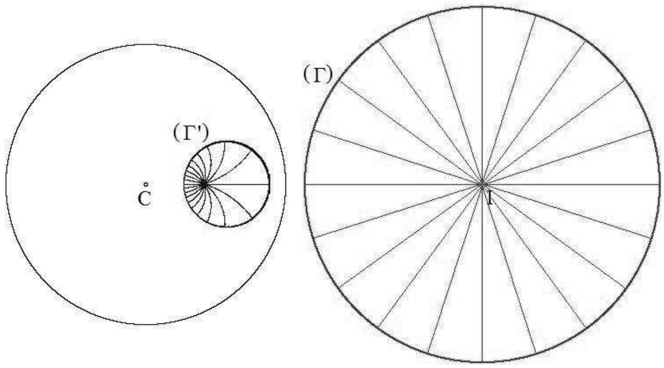


Figure 26 : Le cercle d'inversion de centre *C*, le cercle *Γ* de centre *I* avec ses rayons, le cercle inverse *Γ'* avec les rayons transformés en arcs de cercles et passant tous par le point *I'* inverse de *I* .

2.4. Exercices

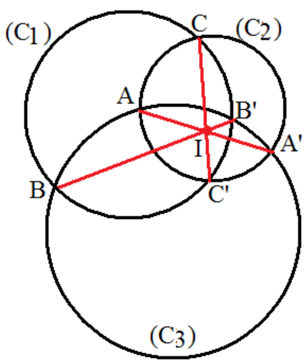
2.4.1. Composée de deux inversions de cercles concentriques

Considérons deux cercles concentriques (C) et (C') de centre O et de rayons R et R'. Déterminer la nature de la composée des deux inversions de cercle (C) et (C').

Appelons I_C et $I_{C'}$ ces deux inversions. Sous l'effet de I_C : $M \rightarrow M_1$ tel que $OM\ OM_1 = R^2$ puis par $I_{C'}$: $M_1 \rightarrow M'$ avec $OM_1\ OM' = R'^2$, les points étant alignés du même côté de *O*. Par division $OM' / OM = R'^2 / R^2$, avec *O*, *M*, *M'* alignés sur [OM). La composée est une homothétie de centre *O* et de rapport R'^2 / R^2 positif.

2.4.2. Trois cercles sécants deux à deux

Prendre trois cercles sécants deux à deux, leurs trois centres n'étant pas alignés. Les cercles (C_1) et (C_2) se coupent en C et C', les cercles (C_2) et (C_3) se coupent en A et A', (C_3) et (C_1) se coupent en B et B'. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



La droite joignant les deux points d'intersection de deux cercles sécants est perpendiculaire à la ligne des centres. Si les cercles n'ont pas leurs trois centres alignés, leurs droites d'intersection ne peuvent pas être parallèles. Notamment (*AA'*) et (*BB'*) se coupent en un point *I*. Or (*AA'*) est l'axe radical du faisceau de cercles engendré par (C_2) *et* (C_3). On sait que l'axe radical est l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport aux deux cercles (C_2) *et* (C_3). De même (*BB'*) est formé des points ayant même puissance par rapport à (C_3) *et* (C_1). Le point *I* a donc même puissance par rapport aux trois cercles. Comme il a la même puissance par rapport aux deux cercles (C_1) *et* (C_2), l'axe radical (*CC'*) correspondant passe aussi par le point *I*.

2.4.3. Inversion transformant l'un en l'autre deux cercles donnés

Considérons deux cercles (C) et (C') non concentriques et de rayons différents. Ils ont pour centres O et O' et pour rayons R et R'. Trouver l'inversion qui fait passer de l'un à l'autre, en faisant un lien avec les homothéties qui font aussi passer de l'un à l'autre. On distinguera deux cas, celui où les cercles sont extérieurs l'un à l'autre ou sécants, et celui où un cercle est intérieur à l'autre.

Les deux cercles donnés (C) et (C') ont pour centres I et I', et pour rayons R et R'. Ils sont caractérisés par leurs rayons et par la distance II'. On sait qu'il existe deux homothéties, l'une positive, l'autre négative, faisant passer de l'un à l'autre.

Supposons d'abord les deux cercles extérieurs l'un à l'autre ou sécants. Ils admettent alors une tangente commune (TT') avec $\mathbf{I'T'} = (R'/R)\,\mathbf{IT}$ (*figure 27*). La tangente commune coupe la ligne des centres en O. Ce point O est tel que $\mathbf{OI'} = (R'/R)\,\mathbf{OI}$, soit $\mathbf{OI} + \mathbf{II'} = (R'/R)\,\mathbf{OI}$, et $\mathbf{OI} = \dfrac{R}{R'-R}\mathbf{II'}$, ou encore $\mathbf{OI'} = \dfrac{R'}{R'-R}\mathbf{II'}$.

On passe alors de (C) à (C') par l'homothétie de centre O et de rapport (positif) R' / R. Un point quelconque M de (C) est envoyé en M_1 sur (C') avec $\mathbf{OM_1} = (R'/R)\,\mathbf{OM}$. La droite ($OM$) coupe le cercle ($C'$) en un deuxième point M', et la puissance $p(O, C')$ de O par rapport au cercle (C') est

$$p(O, C') = OM'\,OM_1 = OT'^{\,2} = OI'^{\,2} - R'^2 = \frac{R'^2(II'^2-(R'-R)^2}{(R'-R)^2}$$

Les points M_1 et M' sont toujours sur la demi-droite [OM), et en éliminant OM_1 on trouve :

$OM\,OM' = (R/R')\,p(O,C')$ = constante. Cela signifie que l'on passe d'un cercle à l'autre par une inversion de cercle de centre O, avec le rayon r de ce cercle tel que :

$$r^2 = \frac{RR'}{(R'-R)^2}(II'^2-(R'-R)^2)$$

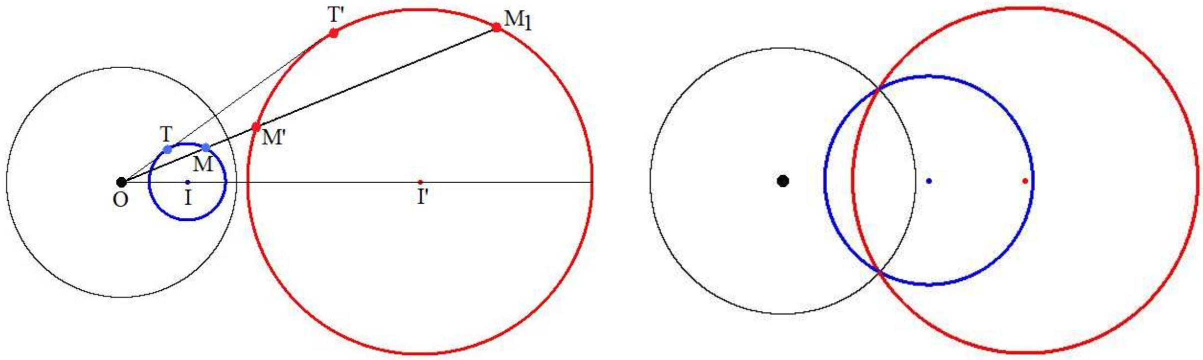


Figure 27 : Les deux cercles donnés sont l'un *en bleu*, l'autre *en rouge*. Le cercle d'inversion est *en noir*. *A gauche*, les deux cercles sont extérieurs, *à droite* ils sont sécants et le cercle d'inversion passe aussi par les points d'intersection.

Supposons maintenant que le cercle (C) est à l'intérieur du cercle (C'). Prenons cette fois l'homothétie négative faisant passer de (C) à (C'). Son centre est O tel que $\mathbf{OI'} = (-\,R'/R)\,\mathbf{OI}$, ce qui s'écrit aussi $\mathbf{OI'} = \dfrac{R'}{R'+R}\mathbf{II'}$. Un point M de (C) est transformé en M_1 sur (C') tel que $\mathbf{OM_1} = (-\,R'/R)\,\mathbf{OM}$ (*figure 28*). D'autre part, La droite (OM) coupe le cercle (C') en un deuxième point M', avec M' sur [OM). La puissance de O par rapport à (C') est $p(O,C') = -\,OM_1\,OM'$ qui est négative. On en déduit que

$OM\,OM' = (-\,R/R')\,p(O,C')$ = constante. On passe bien de M à M' par l'inversion de cercle centré en O et de rayon r tel que $r^2 = (-\,R/R')\,p(O,C') = \dfrac{RR'}{(R'+R)^2}((R'+R)^2 - II'^2)$.

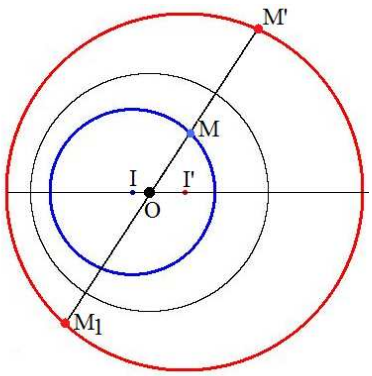


Figure 28 : Inversion de cercle *en noir* transformant le cercle (*C*) *bleu* en cercle (*C'*) *rouge*.

2.4.4. Théorème de Ptolémée

Il s'agit de la propriété suivante : Si un quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle, alors le produit de ses deux diagonales est égal à la somme des deux produits de ses côtés opposés, soit AC BD = AB CD + AD BC. [16]

1) Lors d'une inversion de cercle (C_0) de centre O et de rayon R, avec deux points M et P transformés en M' et P', montrer que $M'P' = \dfrac{R^2}{OM \times OP} MP$

Par définition, *OM OM'* = R^2 et *OP OP'* = R^2.

Dans le cas exceptionnel où les points *M* et *P* sont alignés avec *O*, les points *M'* et *P'* le sont aussi, et *M'P'* = |*OP'* – *OM'*| = | R^2 / *OP* – R^2 / *OM*| = R^2 |*OM* – *OP*| / (*OM OP*) = R^2 *MP* / (*OM OP*).

Dans le cas général où *M* et *P* ne sont pas alignés avec *O*, on a *OP'*/ *OM* = *OM'* / *OP*. Les triangles *OMP* et *OM'P'* ont deux de leurs côtés dans la même proportion avec le même angle entre eux. Ils sont semblables (*figure 29*). On en déduit que

M'P' / *MP* = *OP'*/ *OM* (= *OM'* / *OP*), soit

M'P' = (*OP'* / *OM*) *MP* = $\dfrac{R^2}{OM \times OP} MP$.

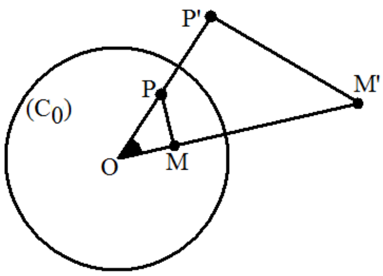


Figure 29 : Triangles *OMP* et *OP'M'* semblables.

2) En pratiquant une inversion dont le cercle est centré en A, en déduire le théorème de Ptolémée.

Appelons (*C*) le cercle circonscrit à *ABCD*. Lors d'une inversion dont le cercle est centré en *A*, avec un rayon unité par exemple, le cercle (*C*) est transformé en droite, sur laquelle se trouvent les points *B' C' D'* transformés de *B C D*. Et les points *B'*, C', *D'* sont dans cet ordre sur la droite, d'où *B'D'* = *B'C'* + *C'D'* (*figure 30*). Grâce à la formule du 1° :

[16] La réciproque est vraie aussi.

$$\frac{BD}{AB\times AD}=\frac{BC}{AB\times AC}+\frac{CD}{AC\times AD}$$
$$=\frac{BC\times AD+CD\times AB}{AB\times AC\times AD}$$
$$BD\times AC=BC\times AD+CD\times AB$$

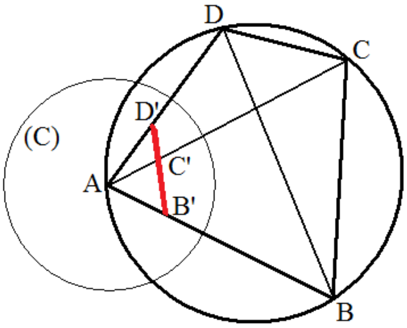
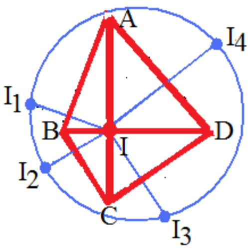


Figure 30 : Le quadrilatère *ABCD* inscrit dans un cercle, et les transformés *B'*, *C'*, *D'* de *B*, *C*, *D* après inversion centrée en *A*.

3) Soit un triangle équilatéral ABC et un point M quelconque sur le petit arc BC de son cercle circonscrit. Montrer que MA = MB + MC.

Appliquons le théorème de Ptolémée : *MA BC* = *AB MC* + *AC MB*. Comme *BC* = *AB* = *AC*, il reste *MA* = *MB* + *MC*.

2.4.5. Quadrilatère à diagonales perpendiculaires



Considérons un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent perpendiculairement en leur point d'intersection I. Montrer que les quatre points symétriques du point I par rapport aux quatre côtés du quadrilatère sont sur un même cercle. Utiliser pour cela une inversion de cercle de centre I, et inverser les cercles de centres A, B, C, D passant par I.

Les cercles de centre *A* et *C* passant par *I* sont tangeents, avec (*BD*) pour tangente commune. De même les cercles de centre *B* et *D* passant par *I* sont tangents, avec (*AC*) comme tangente commune. Les cercles de centre *A* et *B* se coupent en *I* et I_1, avec I_1 qui est justement le symétrique de *I* par rapport à la ligne des centres (*AB*). Il en est de même avec I_2, I_3 et I_4 qui sont les symétriques de *I* par rapport aux trois autres côtés du quadrilatère (*figure 31 à gauche*).

Faisons une inversion dont le cercle a pour centre *I*. Les quatre cercles précédents qui passent par *I* deviennent des droites. Les droites transformées des cercles de centre *A* et *C* sont parallèles à (*BD*) et celles transformées des cercles de centre *B* et *D* sont parallèles à (*AC*). Ces quatre droites forment un rectangle dont les sommets I'_1, I'_2, I'_3, I'_4 sont les images des points I_1, I_2, I_3, I_4 (*figure 31 à droite*). Un rectangle peut toujours être inscrit dans un cercle, avec le point *I* à l'intérieur strictement de ce cercle. A leur tour les quatre points I_1, I_2, I_3, I_4 sont sur le transformé de ce cercle, à savoir un cercle.

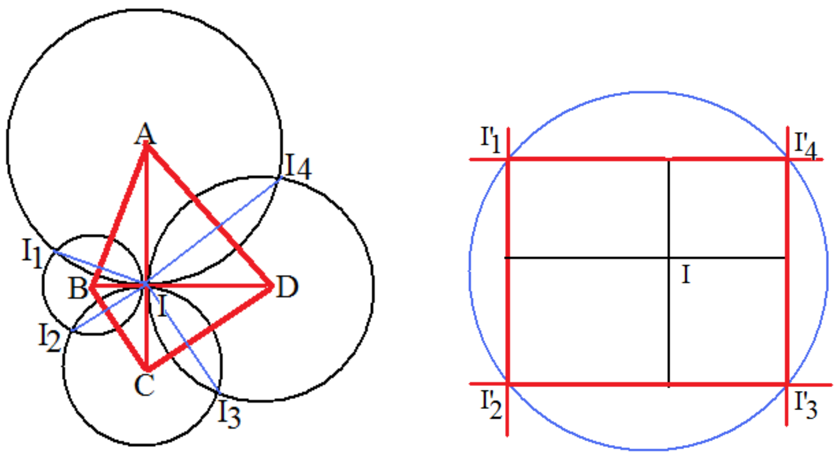


Figure 31 : *A gauche* le quadrilatère *ABCD* et les quatre cercles de centres *A*, *B*, *C*, *D* passant par *I*. *A droite*, les droites images de ces quatre cercles forment un rectangle que l'on peut inscrire dans un cercle.

2.4.6. Guirlande de Steiner

Deux cercles C_1 et C_2 sont donnés, l'un étant à l'intérieur de l'autre. Dans la couronne située entre ces deux cercles, on veut construire une chaîne de cercles en succession, tous tangents aux deux cercles C_1 et C_2, et chacun étant aussi tangent avec ses deux voisins dans la chaîne.

Supposons d'abord les deux cercles concentriques, de centre O et de rayon R_1 et R_2. Dans ce cas particulièrement simple, on constate aussitôt qu'il n'y a aucune garantie de pouvoir insérer entre eux une chaîne de cercles tangents. En fait, le rayon R_1 étant donné, seules des valeurs précises de R_2 pourront convenir, chacune étant associée au nombre N des cercles de la chaîne. Pour le vérifier, donnons-nous R_1 et N (avec N au moins égal à 3, sinon c'est impossible). Chaque cercle tangent doit être intercalé dans un angle $a = 2\pi / N$ (*figure 32*). Le rayon r d'un tel cercle doit être tel que $r/(R_1 + r) = \sin(a/2)$, soit :

$$r = \frac{R_1 \sin(a/2)}{1 - \sin(a/2)}$$

On en déduit le rayon R_2 : $R_2 = R_1 + 2r = R_1 \dfrac{1+\sin(a/2)}{1-\sin(a/2)}$.

Les seules possibilités sont telles que $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{1+\sin(\pi/N)}{1-\sin(\pi/N)}$ pour N entier ≥ 3. Dans tous ces cas où il existe une solution, on peut faire tourner la chaîne des cercles tangents, ce qui donne une infinité de solutions.

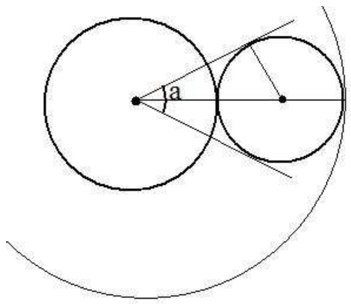


Figure 32 : Un cercle intercalé entre les deux cercles concentriques.

Supposons maintenant que les deux cercles ne sont pas concentriques. On sait qu'ils engendrent un faisceau de cercles à points limites, et dans le *paragraphe 2.3.8.*, nous avons vu qu'un tel faisceau de cercles pouvait être transformé par inversion en cercles concentriques. On est alors ramené au cas précédent des cercles concentriques. En pratiquant une inversion sur la chaîne des cercles tangents dans la couronne des cercles concentriques, on obtient une guirlande de cercles tangents entre deux cercles non concentriques (*figure 33*). On peut ensuite faire tourner la guirlande, à partir de la rotation de celle située entre les cercles concentriques (*figure 34*).

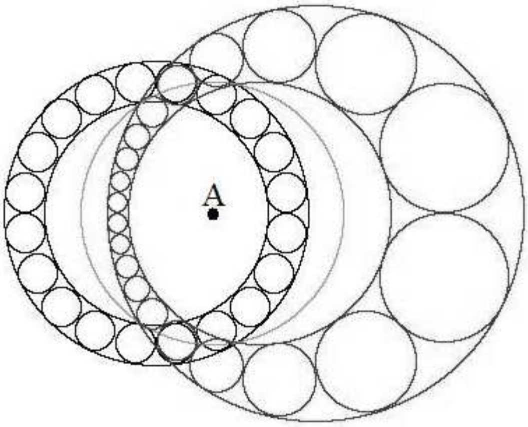


Figure 33 : Guirlande de 20 cercles tangents dans le cas des cercles concentriques, puis la guirlande entre deux cercles non concentriques après inversion de la figure initiale autour d'un cercle (en gris pâle) de centre *A*.

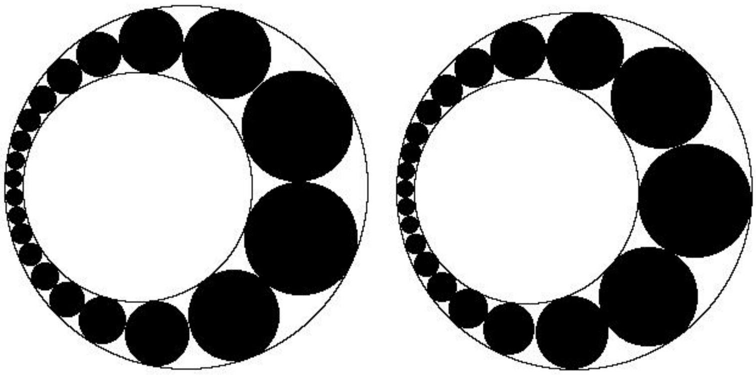


Figure 34 : Guirlande de Steiner en rotation

2.4.7. Guirlande de disques

On part d'une chaîne de plusieurs disques, tous tangents de l'un au suivant. Dans notre exemple on en a pris quatre (*en noir sur la figure 35 à gauche*). Puis on utilise chacun de ces disques comme cercle d'inversion pour inverser les trois autres disques. On obtient ainsi une nouvelle chaîne de 12 disques. Puis on recommence avec ces 12 disques, en utilisant chacun pour inverser les onze autres, d'où 132 disques. En recommençant on a une guirlande de 17292 disques, tous tangents en succession. Comme les quatre cercles initiaux forment une chaîne non régulière, il se produit une infinité de ruptures de pente sur la forme limite (appelée ensemble limite), lui donnant une vague ressemblance avec la fractale de Mandelbrot (*figure 35 à droite*).

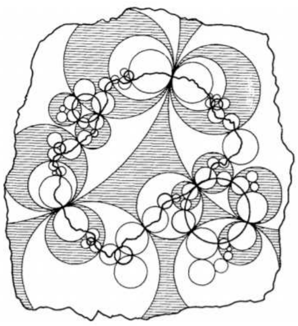


Figure 35 : *En haut*, premier dessin d'un ensemble limite kleinien, dans un livre de F. Klein et R. Fricke paru en 1897. *En bas à gauche* premières guirlandes (les quatre cercles initiaux en noir, puis 12 cercles, puis 132 cercles), *à droite* guirlande de 17292 cercles, proche de l'ensemble limite.

3. La géométrie de l'inversion

Ajoutons un point « infini » noté ∞, et le plan devient le plan (complexe) élargi $\hat{C} = C \cup \infty$. Dans ce plan appelons cercle généralisé soit un cercle habituel soit une droite élargie, à savoir la droite classique à laquelle on ajoute le point ∞.

3.1. Redéfinition de l'inversion et définition d'une transformation inversive

Au sens large, l'inversion (ou réflexion) se fait maintenant par rapport à un cercle Γ généralisé :

- Si Γ est un cercle de centre O et de rayon R,

- pour un point M autre que O et ∞, on reprend la définition habituelle : il a pour transformé M' tel que $OM\,OM' = R^2$ avec M' sur $[OM)$
- si $M = O$, $M' = \infty$
- si $M = \infty$, $M' = O$.

- Si Γ est une droite élargie, il s'agit de la réflexion habituelle, avec en plus $\infty \to \infty$

Ainsi élargie, l'inversion devient une bijection involutive dans $\hat{C}$. On sait aussi qu'elle conserve les angles non orientés, mais en changeant le sens des angles orientés, et qu'elle transforme les cercles généralisés en cercles généralisés.

Par définition, une transformation inversive est la composée d'inversions. Elle a donc comme propriétés de conserver les angles non orientés et de transformer les cercles généralisés en cercles généralisés.

3.2. Exemples de transformations inversives

- Fonction conjuguée dans $\hat{C}$: il s'agit de $z \to \overline{z}$ dans $\boldsymbol{C}$, et $\infty \to \infty$.

Elle généralise la réflexion autour de l'axe Ox.

- Fonction inverse : $z \to 1/z$ dans $\boldsymbol{C} - \{0\}$, $0 \to \infty$, $\infty \to 0$.

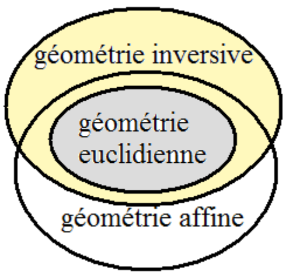
Il s'agit de la composée de l'inversion de cercle unité et de la fonction conjuguée.

- Fonction linéaire $z \to a\,z + b$ (avec a et b dans $\boldsymbol{C}$ et $a \neq 0$) lorsque z est dans $\boldsymbol{C}$, avec en plus $\infty \to \infty$.

Dans C, il s'agit d'une similitude directe. On sait que celle-ci est la composée d'une homothétie et d'une isométrie directe (rotation ou translation). Une isométrie directe est toujours la composée de deux réflexions, et une homothétie peut s'écrire comme composée de deux inversions de cercles ayant le même centre (*cf. exercice 2.4.1*). On a donc bien par composition une transformation inversive.

3.3. Groupe des transformations inversives et géométrie inversive

Prenons l'ensemble des transformations inversives dans $\hat{C}$, d'est-à-dire des composées d'inversions au sens large. Cet ensemble a une structure de groupe, puisque notamment la composée de deux d'entre elles est la composée d'inversions et par suite une transformation inversive, et que toute inversion admet une inversion inverse, ce qui fait qu'il en est de même pour toute composée d'inversions. Un tel groupe de transformations dans $\hat{C}$ définit ce que l'on appelle la géométrie inversive, qui a pour caractéristique de préserver les cercles généralisés en tant que figures. Aussi appelle-t-on ce groupe des transformations inversives le groupe circulaire.



En considérant la géométrie classique euclidienne avec son groupe d'isométries préservant les droites, les cercles et les angles, et la géométrie affine comme préservant les proportions et par suite les droites, les cercles mais pas forcément les angles, la géométrie inversive inclut la géométrie euclidienne et une partie de la géométrie affine mais pas toute, car par exemple un cisaillement en géométrie affine n'est pas une transformation inversive.

Pour poursuivre l'étude de la géométrie inversive, nous allons avoir besoin de préciser ce que sont des composées d'inversions. Là vont apparaître les transformations homographiques, aussi appelées transformations de Mobius. C'est l'objet du chapitre suivant.