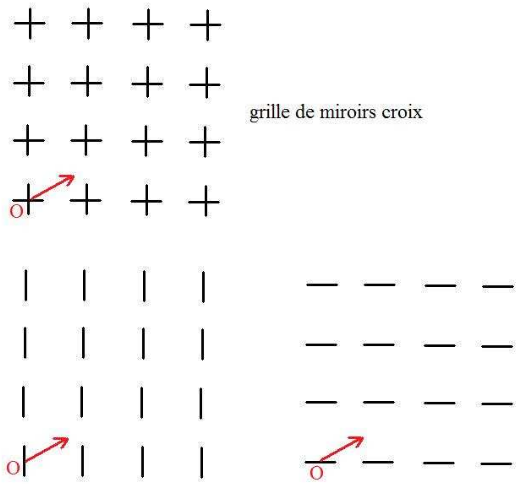
Droites et géométrie discrète (2)

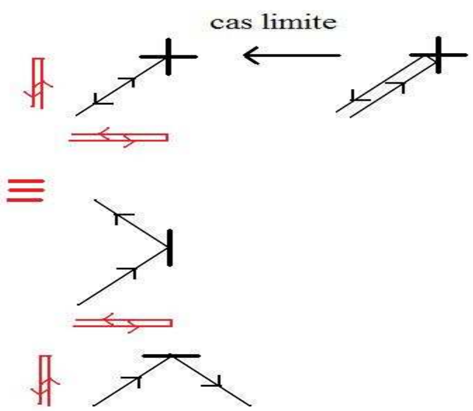
Trajectoires lumineuses dans une grille de miroirs

Plaçons-nous dans un quadrillage infini du plan où sont régulièrement disposés des miroirs en forme de croix. Les deux miroirs d'une croix ont tous deux la même longueur, comprise entre 0 et 1, lorsqu'on la rapporte à la longueur unité d'une maille du quadrillage. Un rayon lumineux est lancé avec une pente donnée. Nous prendrons d'abord comme point de départ le coin à angle droit d'une croix, et la pente sera supposée rationnelle. L'objectif est d'étudier le cheminement du rayon lumineux passant à travers les trous ou rebondissant sur les miroirs croix.



Cela revient à étudier la trajectoire lumineuse dans une grille verticale de miroirs, puis dans une grille horizontale de miroirs. Avec une grille verticale de miroirs, la trajectoire s'en va à l'infini verticalement vers le haut, mais sa projection horizontale est la même que celle obtenue pour les miroirs croix. Avec une grille horizontale, la trajectoire s'en va à l'infini horizontalement vers la droite, mais sa projection sur une verticale est la même que celle obtenue avec les miroirs croix. D'autre part, le cas des miroirs horizontaux se ramène à celui des miroirs verticaux. Il suffit de prendre une pente b/a au lieu de a/b et le problème des miroirs horizontaux se ramène à celui des miroirs verticaux.

Convention préalable



Lorsque le rayon lumineux tombe exactement sur le coin d'un miroir croix, nous conviendrons qu'il revient exactement sur ses pas. Cela correspond à la limite par continuité du cas où le rayon touche un miroir tout près d'un coin, et cela correspond aussi à ce qui se passe pour sa projection horizontale et sa projection verticale, identiques aux projections de la trajectoire sur une grille verticale et sur une grille horizontale de miroirs.

1) Grille de miroirs verticaux

1-a) Rappels sur la droite discrète

Prenons une droite de pente positive a/b, avec a et b entiers positifs et premiers entre eux (la fraction a/b est irréductible). Selon que a est inférieur ou supérieur à b, la pente est inférieure ou supérieure à 1. Dans tous les cas, la droite passant par l'origine O peut être approchée par des points rasants situés juste au-dessous, avec des coordonnées (x, $[ax/b]$). La suite (u_n) des restes de la division de ax par b obéit à la récurrence $u_{n+1} = u_n + a\ [b]$ avec $u_0 = 0$, et u_n /b est la distance verticale qui sépare les points rasants de la droite. Il suffit de parcourir le segment $O\ O'$ avec O' (b, a). Le parcours de la droite correspond à la répétition périodique du parcours de ce segment. Rappelons que la suite (u_n) est une permutation de $\boldsymbol{Z}_b$. Commençons par multiplier par b les distances horizontales et verticales : les graduations vont de b en b, les centres de miroirs sont maintenant séparés par une distance b et non plus 1, et la distance verticale séparant les points rasants de la droite est maintenant un nombre entier, en l'occurrence u_n.

Au lieu de prendre les points rasants au-dessous, on peut prendre les points rasants au plus près, au-dessus ou en dessous. Quand u_n dépasse $b/2$, le point le plus proche est maintenant au-dessus, et la distance (vers le bas) qui le sépare de la droite est $b - u_n$. Appelons v_n la suite des distances verticales entre la droite et les points entiers les plus proches. On a $v_n = u_n$ si $u_n <= b/2$, et $v_n = b - u_n$ sinon.

Exemples

- pente $a/b = 3/8$:

suite (u_n)	0	3	6	1	4	7	2	5	0
quotient $[3x/8]$	0	0	0	1	1	1	2	2	3
suite (v_n)	0	3	2	1	4	1	2	3	0

- pente 8/3 :

suite (u_n)	0	2	1	0
quotient $[8x/3]$	0	2	5	8
suite (v_n)	0	1	1	0

On note que la suite (v_n) présente une symétrie centrale, puisque la progression arithmétique de raison a (modulo b) de gauche à droite est aussi une progression arithmétique de raison $- a$ en allant de droite à gauche.

1-b) Mot associé à la trajectoire

Prenons comme origine O le centre d'un miroir. Supposons d'abord les miroirs infiniment petits, de telle sorte qu'ils ne font aucun obstacle jusqu'au point O' (b, a). La trajectoire OO' est une ligne droite. Puis grossissons progressivement la longueur des miroirs. Quand la demi-longueur d'un miroir atteint 1 (ou un et des poussières), un demi-miroir couvre les graduations 0 et 1 soit vers le haut soit vers le bas, un premier miroir traverse le segment OO', et un deuxième miroir symétrique par rapport au milieu de $[OO']$ est aussi traversé, à cause de la symétrie centrale de la suite (v_n). Cela signifie que la trajectoire subit deux réflexions, ce qui revient à plier deux fois la trajectoire jusqu'ici linéaire. La nouvelle trajectoire en ligne brisée conserve sa symétrie par rapport à son propre milieu. Il en est de même lorsque l'on continue d'allonger les miroirs. Lorsque la longueur d'un demi-miroir atteint 2 (ou 2 et des poussières), couvrant les graduations 0, 1, 2, deux nouveaux rebonds se produisent, eux aussi symétriques, et la trajectoire est toujours symétrique par rapport à son milieu. Il en est ainsi pour chaque longueur des demi-miroirs : 1, 2, 3, …, [b/2].

Reprenons la suite (v_n) définie ci-dessous, et prenons les longueurs possibles des miroirs. Si un miroir recouvre les graduations 0 et 1, on découpe la suite (v_n) en trois intervalles, le premier entre 0 et 1, jusqu'au premier rebond, puis de 1 jusqu'à l'autre 1, où a lieu le deuxième rebond, et enfin de 1 à 0, où la trajectoire touche finalement un miroir en son centre. Les longueurs de ces trois intervalles donnent un mot, formé de trois lettres (ici des nombres) associé à la trajectoire. De nouveaux intervalles apparaissent lorsque la longueur des miroirs augmente, et le mot s'allonge.

Exemples

- 5/8

u_n : 0 5 2 7 4 1 6 3 0
v_n : 0 3 2 1 4 1 2 3 0
∗miroirs de demi-longueur 1 : $\underline{0}$ 3 2 $\underline{1}$ 4 $\underline{1}$ 2 3 $\underline{0}$
mot de trajectoire : 3 2 3

Cela signifie que l'on avance d'abord horizontalement de trois pas vers la droite puis, après rebond, on fait deux pas vers la gauche, et enfin après rebond, on fait trois pas vers la droite, pour « s'arrêter » au centre d'un miroir.

∗miroirs de demi-longueur 2 : $\underline{0}$ 3 $\underline{2}$ $\underline{1}$ 4 $\underline{1}$ $\underline{2}$ 3 $\underline{0}$
mot de trajectoire : 2 1 2 1 2
∗miroirs de demi-longueur 3 : $\underline{0}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ 4 $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ $\underline{0}$
mot de trajectoire : 1 1 1 2 1 1 1
∗miroirs de demi-longueur 4 : $\underline{0}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ $\underline{4}$ $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ $\underline{0}$
mot de trajectoire : 1 1 1 1 1 1 1 1

- 8/5

u_n : 0 3 1 4 2 0
v_n : 0 2 1 1 2 0
∗miroirs de demi-longueur 1 : $\underline{0}$ 2 $\underline{1}$ $\underline{1}$ 2 $\underline{0}$
mot de trajectoire : 2 1 2
∗miroirs de demi-longueur 2 : $\underline{0}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{0}$
mot de trajectoire : 1 1 1 1 1

Propriétés du mot de trajectoire

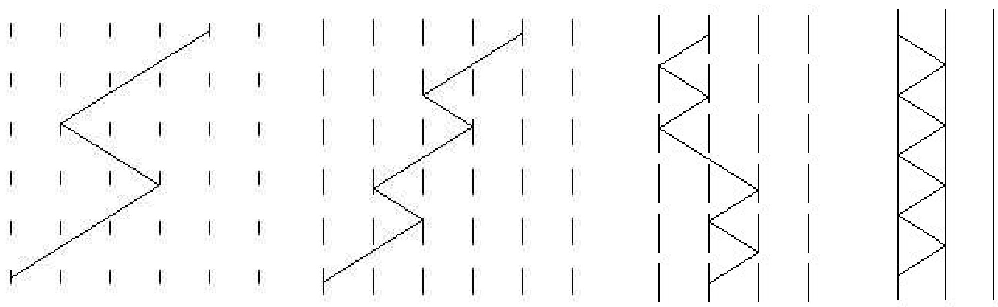
- Il est son propre miroir, et il possède une longueur impaire, sauf dans le cas exceptionnel où b est pair et que la longueur du demi-miroir est la longueur maximale b/2. Dans le cas général, il est de la forme $mc\underline{m}$ où c désigne le mot central et $\underline{m}$ est le mot m mis à l'envers. Ce nombre c est pair si b est pair, et impair sinon.
- La somme des nombres qui composent ce mot est égale à b, longueur de la trajectoire.
- Lors du passage d'une longueur de miroir à la suivante, c'est le nombre le plus grand qui se découpe en deux. Les positions des deux 1, où ont lieu les premières coupes, sont + a^{-1} ou – a^{-1} [b]. Celles des deux nombres k, où ont lieu les $k^{\text{èmes}}$ coupes, sont + ka^{-1} ou – ka^{-1} [b].
- On obtient les mêmes mots pour a/b et $(b – a)/b$.

Algorithme de construction de la trajectoire

On commence par fabriquer les termes des suites u_n, v_n, et les quotients q_n. On en déduit le mot associé à la trajectoire. En alternant ses signes, et en faisant des sommes partielles, on trouve les abscisses des miroirs où ont lieu les rebonds. Par exemple pour le mot 323, on forme 3 –2 3 : le premier rebond a lieu à l'abscisse 3*b* (la distance séparant deux miroirs étant *b*, comme on l'a précisé avant), le deuxième rebond a lieu à l'abscisse $(3 - 2)b = 1b$, et le troisième à l'abscisse $(1 + 3)b = 4b$. Le quotient q_i correspondant au point de rebond est lié à son ordonnée, plus précisément cette ordonnée est $b\, q_i + u_i$, mais si v_i est différent de u_i, il convient de prendre le miroir au-dessus et l'ordonnée du rebond est $b\,(q_i+1) - u_i$. On en déduit le programme :

```
u[0]=0; q[0]=0;
for(i=1;i<=b;i++)
  { u[i]=u[i-1]+a; q[i]=q[i-1];
     while (u[i]>=b) { u[i]-=b; q[i]++;}
   }
 for(i=0; i<=b;i++) if (u[i]>b/2) v[i]=b - u[i];else v[i]=u[i];

 longueur[0]=0; quotient[0]=0;k=1; oldi=0;
 for(i=1; i<=b;i++)
 if (v[i]<=alphab)     /** alphab est la longueur entière d'un demi-miroir */
   { longueur[k]=i-oldi;  oldi=i;
     quotient[k]=q[i];
     if (v[i]!=u[i]) { quotient[k]++; yr[k]=b*quotient[k]-v[i];}
     else yr[k]=b*quotient[k]+v[i];
     k++;
     }
 nbmiroirs=k;
 xr[0]=0; signe=1;yr[0]=0;
 for(i=1;i<nbmiroirs;i++)
   { xr[i]=xr[i-1]+signe*longueur[i];
      line(xorig+b*zoom*xr[i-1],yorig-zoom*yr[i-1],xorig+b*zoom*xr[i],yorig-zoom*yr[i],black);
     signe=-signe;
   }
```



Trajectoires de lumière pour une pente de 5/8, avec les longueurs des demi-miroirs égales à 1, 2, 3, 4.

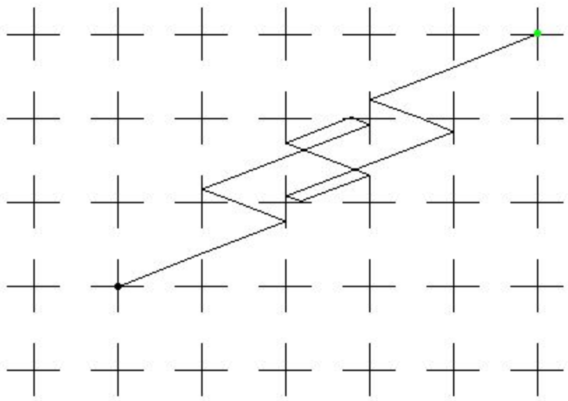
1-c) Trajectoire infinie

Nous avons obtenu la trajectoire lumineuse sur une longueur de période. On constate que le vecteur final $\nearrow$ est le même que le vecteur initial $\nearrow$ (sauf pour *b* pair et les miroirs de longueur maximale). On passe ainsi du point (0, 0) au point final noté

(x_f, y_f). Lorsque la trajectoire se poursuit, avec le point (x_f, y_f) au centre d’un miroir, elle rebondit (↖) et repart dans l’autre sens, jusqu’à atteindre le point (0, $2y_f$). Puis elle redémarre comme au tout début (↗). Et ainsi de suite… La trajectoire s’en va à l’infini verticalement, mais reste confinée dans une zone finie en projection horizontale.

2) Grille de miroirs croix

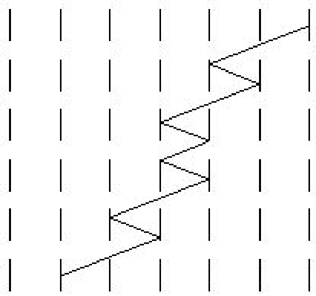
Avec une grille de miroirs croix, on sait que la projection de la trajectoire sur une horizontale est la même que celle obtenue avec la grille des miroirs verticaux, et que sa projection sur une verticale est la même que celle avec les miroirs horizontaux. Il en découle que dans la grille de miroirs croix, la trajectoire reste confinée dans un rectangle en repassant indéfiniment sur elle-même.



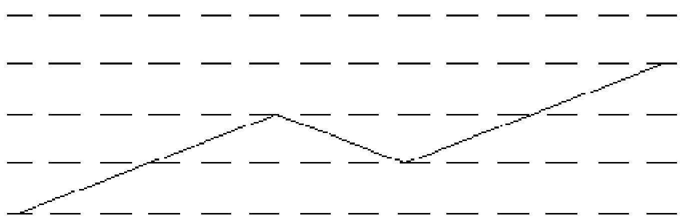
mot de trajectoire 21211212 en projection sur l’axe horizontal

mot de trajectoire 212 en projection sur l’axe vertical

Trajectoire de lumière pour une pente initiale 5/13 dans la grille des miroirs croix (longueur des demi-miroirs : 4/13)



Trajectoire dans la grille verticale (mot de trajectoire 21211212 sur l’axe horizontal)

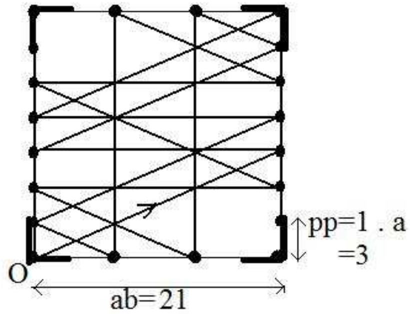


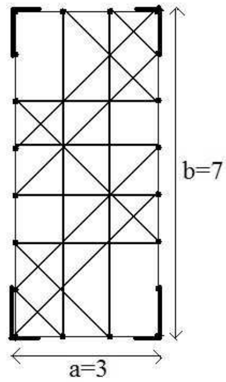
Trajectoire dans la grille horizontale (mot de trajectoire 212 sur l’axe vertical)

Programme

Pour les calculs, on va grossir le carré unité du quadrillage, en lui donnant la longueur $c = ab$. Ainsi, non seulement les points de la trajectoire situés sur les verticales du quadrillage sont à coordonnées entières, mais aussi ceux sur les horizontales. On peut aussi ramener la trajectoire à l’intérieur d’un seul carré, avec effet cyclique, en haut et en bas, ainsi qu’à gauche et à droite. Les deux côtés verticaux sont découpés en b intervalles, et les côtés horizontaux en a intervalles. Seules les graduations correspondantes sur la bordure du carré sont touchées par le rayon lumineux. Ajoutons les demi-miroirs croix dans les angles du carré. Leur longueur est $pp = ka$ (avec k entre 0 et $b/2$ si on privilégie les points de rebonds verticaux, on pourrait prendre aussi $pp = k'b$ pour privilégier les rebonds horizontaux).

Pour simplifier encore, on peut contracter le carré modulaire pour avoir un rectangle de longueur horizontale a et de hauteur b, la pente du rayon lumineux étant alors de 45°. La trajectoire part du sommet O du carré (ou du rectangle) pour arriver au sommet opposé (sauf pour b pair avec le miroir de dimension maximale).





A gauche, trajectoire repliée dans le carré modulaire pour la pente a/b = 3/7 et un demi-miroir de longueur pp = 1 . a . *A droite*, la même trajectoire dans le rectangle modulaire.

Dans le programme, on commence par dessiner un quadrillage de miroirs croix, en se donnant une certaine distance de Z pixels entre leurs centres, d'où un $zoom = Z / c$, les calculs étant faits dans les carrés de côté $c = ab$:

```
a=5;  b=13; c=a*b;  Z = 60.;   /** Z longueur d'un pas sur l'écran */
zoom = Z/(float)c;   /* on passe de la longueur c pour les calculs à Z sur l'écran, par zoom */
pp=4*a;  L=4./(float)b;     /** pp longueur de la demi croix, L longueur ramenée au carré unité */
for(i=-5;i<6;i++)  for(j=-4;j<5;j++)
   { line(xorig+Z*i-Z*L,yorig-Z*j,xorig+Z*i+Z*L,yorig-Z*j,black) ;
     line(xorig+Z*i,yorig-Z*j-Z*L,xorig+Z*i,yorig-Z*j+Z*L,black) ;
   }
```

Puis on lance la boucle des rebonds ou des traversées des carrés. On utilise le rectangle modulaire pour savoir si le rayon lumineux touche un côté vertical ou un côté horizontal. La direction du rayon est donnée par *signex* qui vaut 1 ou -1 selon qu'il va de gauche à droite ou de droite à gauche, et de même par *signey* selon qu'il va vers le haut ou vers le bas. Le rayon part d'une bordure du rectangle en (x, y). Il arrive sur une bordure verticale en un point situé à une distance d_1 ou sur une bordure horizontale en un point situé à une distance d_2, et l'on choisit la distance d la plus courte des deux (*voir PARTIE 1 dans le programme*). Par exemple, si le rayon part de (0, 0), il arrive en $x = a$ (et $y = a$) sur une bordure verticale, lorsque $a < b$.

Puis on convertit ce passage en se plaçant dans les carrés de côté ab : x est transformé en bx, et y en ay, dans le carré modulaire. Si l'on se place dans le quadrillage de côté ab, le modulo étant supprimé, on passe du point ($oldx$, $oldy$) au point (xx, yy) comme indiqué dans la *PARTIE 2* du programme, ce qui permet de dessiner le rayon sur l'écran, grâce au *zoom*. A noter l'évolution des variables *compteurx* et *compteury* qui comptent le nombre de carrés traversés.

Enfin il s'agit de savoir si le rayon touche ou non un miroir. Par exemple, il ne se produit pas de rebond sur une bordure verticale (en $x = 0$ ou $x = a$) lorsque $ay > pp$ et $ay < c - pp$, et de même sur une bordure horizontale. Sinon, en cas de rebond ($flag = 0$), on provoque un changement de direction du rayon grâce à *signex* ou *signey*, comme indiqué dans la *PARTIE 3* du programme.

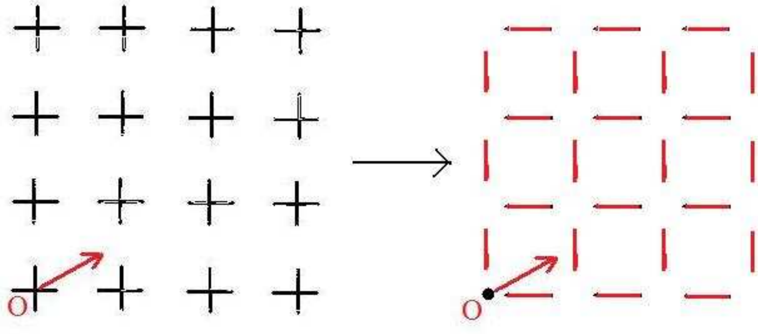
```
x=0;y=0;
signex=1;signey=1;compteurx=0;compteury=0;
for(i=0;i<30;i++)
{
if (signex==1) d1=a-x;else d1=x;            /*  PARTIE 1  */
if (signey==1) d2=b-y;else d2=y;
if (d1>d2) d=d2; else d=d1;

flag=0; oldx=b*x+c*compteurx;oldy=a*y+c*compteury;     /*  PARTIE 2  */
x+=signex*d; y+=signey*d;
xx=b*x+c*compteurx;yy=a*y+c*compteury;
line(xorig+zoom*oldx,yorig-zoom*oldy,xorig+zoom*xx,yorig-zoom*yy,black);

if ((float)b*(float)x>pp && (float)b*(float)x<(float)c-pp)          /*  PARTIE 3 */
  { if (y==0) {y=b; compteury--; flag=1;  }
    else if (y==b) {y=0; flag=1;  compteury++;}
  }
if ((float)a*(float)y>pp && (float)a*(float)y<(float)c-pp)
  { if (x==0) {x=a;flag=1;  compteurx--; }
    else if (x==a) { x=0; flag=1; compteurx++;  }
  }
if (flag==0)
  { if (d1<d2) signex=-signex;
    else if (d2<d1) signey=-signey;
    else if (d1==d2) break;
  }
}
```

3) Le billard complémentaire

Dans la grille des miroirs croix, remplaçons les miroirs par des trous et les trous par des miroirs, sans changer le point de départ du rayon lumineux, situé maintenant au milieu d'un trou. On obtient ce que l'on appelle le billard complémentaire. Comme auparavant, il suffit de se placer dans une grille verticale de miroirs pour avoir la projection horizontale de la trajectoire dans le miroir complémentaire.



Grille de miroirs croix et *à droite* le billard complémentaire

Mot de trajectoire pour le billard complémentaire vertical

Il existe un lien entre les mots de trajectoire pour le billard vertical et son complémentaire vertical aussi. Les points de rebond du billard complémentaire correspondent aux passages dans des trous du billard initial et vice-versa. Etant donnée la pente initiale a/b et la longueur d'un demi-trou (*ka* lorsque le côté du carré de base est *ab*, avec *k* entre 0 et *b*/2), les mots associés aux deux types de billard se déduisent de la progression arithmétique modulaire associée à a/b.

Exemple : $a/b = 3/7$ et $k = 1$ (1 . *a* est la longueur d'un demi-miroir vertical pour le billard vertical initial et d'un demi-trou pour le billard complémentaire).

suite (*u*) : 0 3 6 2 5 1 4 0

suite (*v*) : $\underline{0}$ 3 $\underline{1}$ 2 2 $\underline{1}$ 3 $\underline{0}$ soit 2 3 2 pour le billard initial (le miroir occupe les graduations 0 et 1 en bas et en haut)

ou $\underline{0}$ $\underline{3}$ 1 $\underline{2}$ $\underline{2}$ 1 $\underline{3}$ $\underline{0}$ soit 1 2 1 2 1 pour le complémentaire (on part et on arrive en 0, et le miroir occupe les graduations 2 et 3).

Les deux mots présentent un effet miroir, et leurs longueurs *L* et *L'* vérifient :

$L + L' = b + 1$.

L'algorithme de passage du mot de billard vertical au mot du complémentaire est simple : sous les deux nombres aux extrémités du mot de billard, on place deux points. Puis sous chaque nombre *n* du mot de billard on place $n - 1$ points. Enfin on lit les distances successives séparant tous ces points en leur ajoutant 1, cela donne le mot du complémentaire. Par exemple pour 3/7 :

2 3 2

•• •• •• d'où 1 2 1 2 1

Une différence essentielle apparaît : Si pour le billard vertical normal le mot de trajectoire s'arrêtait au milieu d'un miroir (ou dans le coin d'une croix), ici il s'arrête au milieu d'un trou. Que va-t-il se passer ensuite ? On distingue deux cas :

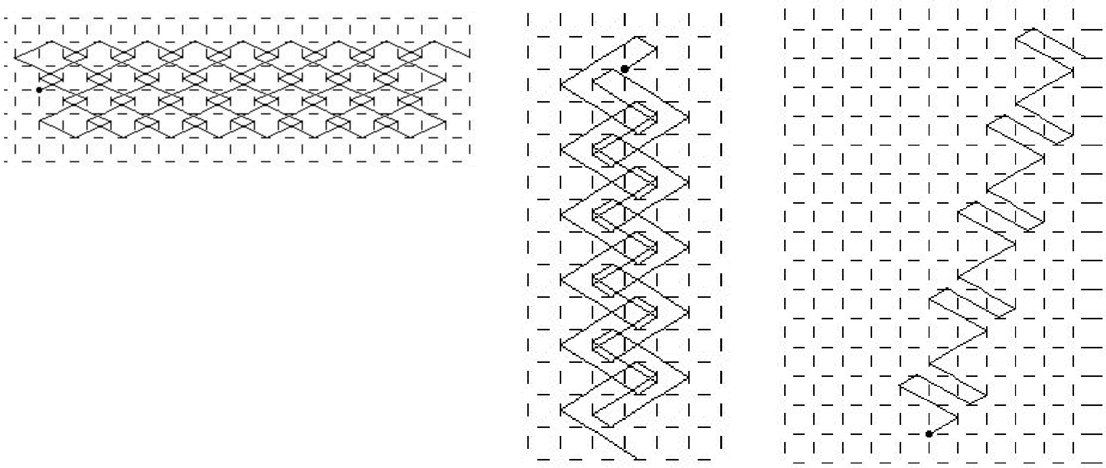
- *b* est impair. On sait que la longueur *L* du mot du billard vertical est impaire. Avec $L + L' = b + 1$, la longueur *L'* du complémentaire est aussi impaire, ainsi que le nombre central *c*, le mot s'écrivant $m\ c\ \underline{m}$. Cela entraîne qu'à la fin le vecteur final du rayon lumineux est le même que le vecteur initial, soit ↗ . D'autre part la variation d'abscisse entre le début et la fin n'est pas nulle.[1] Il s'ensuit que le rayon lumineux poursuit sa course à l'infini suivant l'axe des *x*, en répétant le même motif.
- *b* est pair. La longueur *L* du mot du billard vertical est impaire (sauf dans le cas exceptionnel indiqué auparavant, avec des miroirs occupant toute la place, ou aucun miroir pour le complémentaire) , mais à cause de $L + L' = b + 1$, la longueur *L'* est maintenant paire. Cela, joint à l'effet miroir du mot, prouve qu'à la fin du parcours, l'abscisse du rayon lumineux est la même qu'au départ, et qu'avec un vecteur initial de la forme ↗ , le vecteur final est ↖ .

[1] Le mot est $m\ c\ \underline{m}$ avec *c* impair. Distinguons deux cas. Si la longueur de *m* est paire, et que la somme alternée des nombres de *m* est *q*, la somme alternée de $\underline{m}$ est aussi *q*, et la somme alternée des nombres de $m\ c\ \underline{m}$ est $q + c + q = 2q + c$ qui ne peut être nulle, comme somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. Si la longueur de *m* est impaire, la somme alternée de $m\ c\ \underline{m}$ est $q - c + q = 2q - c$, jamais nulle non plus.

En projection sur l’axe horizontal, la trajectoire ne cesse d’osciller symétriquement autour de *O*, dans une zone finie.

Conséquence pour le billard complémentaire des miroirs croix, avec ses miroirs horizontaux et verticaux :

La pente est *a*/b par rapport à l’axe des *x*, et *b*/*a* par rapport à l’axe des y. L’un des deux nombres *a* ou *b* est forcément impair. On distingue trois cas. Si *a*/*b* est de la forme pair/ impair, la trajectoire va s’en aller à l’infini horizontalement, en restant confinée verticalement. Si *a*/*b* est de la forme impair/pair, la trajectoire s’en va à l’infini verticalement et reste confinée horizontalement. Enfin si *a*/*b* est de la forme impair/ impair, la trajectoire s’en va à l’infini aussi bien horizontalement que verticalement.



Les trois types de trajectoires selon les valeurs de *a*/*b* : pair/ impair (4/9), impair/pair (5/8) et impair/impair (5/9) *de gauche à droite* (dans tous les cas on a pris une longueur des miroirs égale à celle des trous)

Pente moyenne de la trajectoire dans le cas où *a*/*b*= impair/impair

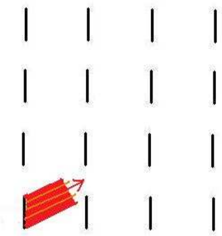
Prenons l’exemple de *a*/*b* = 5/9, avec la longueur des trous égale à celle des miroirs (*voir dessin ci-dessus à droite*). Dans le rectangle modulaire de côtés *b* et *a*, le demi-trou occupe 9/4 = 2 graduations sur la hauteur, et 5/4 = 1 graduation sur la longueur (dans le carré de côté 45, la longueur du demi-trou mesure 9 . 5 / 4 = 11,2).

- Pente 5/9 : la suite (*v*) est : $\underline{0}\ \underline{4}\ 1\ \underline{3}\ 2\ 2\ \underline{3}\ 1\ \underline{4}\ \underline{0}$ d’où le mot de trajectoire du complémentaire vertical : 1 2 3 2 1, avec l’abscisse finale 1 – 2 + 3 – 2 + 1= 1
- Pente 9/5 : la suite (*v*) est : $\underline{0}\ 1\ \underline{2}\ \underline{2}\ 1\ \underline{0}$ d’où le mot de trajectoire du complémentaire horizontal : 2 1 2, et l’ordonnée finale 2 – 1 + 2 = 3.

La pente moyenne de la trajectoire est 3/1 = 3.

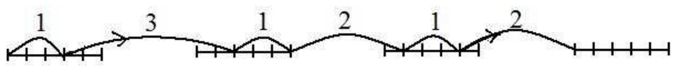
4) Ruban lumineux dans la grille de miroirs verticaux

Jusqu’ici nous avons fonctionné en mode discret, en lançant un seul rayon lumineux issu du centre d’un miroir vertical. Si le miroir comporte plusieurs graduations où se produisent des rebonds, on peut considérer qu’il s’agit de nouveaux points de départ pour lancer des rayons, ce qui ne fait que produire un, décalage cyclique dans le mot associé à la trajectoire. Mais on ne peut guère aller plus loin.



Aussi allons-nous placer dans un nouveau contexte, en mode non plus discret mais continu. Désormais, chaque carré du quadrillage mesure une unité, et on lance un ruban lumineux à partir de tous les points d'un miroir (avec des ordonnées qui sont des nombres réels) suivant une direction donnée, de pente p, qui n'est pas forcément un nombre rationnel a/b. Pour simplifier, on prendra seulement le cas où les miroirs occupent la même place que les trous, soit 0,5, ainsi qu'une pente p entre 0 et 1. Dans le carré modulaire de côté unité, où l'on peut replier les trajectoires, chaque traversée du carré provoque une variation d'ordonnée de p, ramenée modulo 1, p étant la pente des rayons. Le nombre de traversées du carré pour aller d'un miroir à un autre donnera progressivement les trajectoires des rayons. Le problème peut donc être reformulé de la façon suivante.

On a des plots de longueur 0,5 régulièrement espacés, avec des vides entre eux de longueur 0,5 aussi. Un robot est programmé pour faire uniquement des pas qui sont des multiples d'un pas élémentaire de longueur p. Il part d'un point situé sur un plot, et doit marcher en restant constamment sur les plots, en faisant à chaque fois un pas de longueur minimale (celui-ci étant un multiple du pas élémentaire p). Le mot associé à la trajectoire est formé de la succession des nombres de pas élémentaires qu'il doit faire à chaque fois.



Exemple avec p = 0,3 et départ à l'extrémité gauche d'un plot,
d'où le mot de période 1 3 1 2 1 2

Comme dans l'exemple ci-dessus, lorsque p est un nombre rationnel a/b (où a et b sont premiers entre eux), le mot de trajectoire est périodique. Au bout de quelques étapes, la trajectoire retombe sur la même position que celle qu'elle avait au départ sur un miroir. Plus précisément, cela arrive pour la plus petite valeur d'un entier positif k tel que $k\ p$ soit un nombre entier, soit pour $k = b$. La somme des nombres formant la période du mot est toujours égale à b.

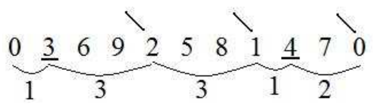
Restons dans le cas où la pente est rationnelle, avec $p = a/b$, et grossissons le dessin en multipliant les distances par b. Désormais, chaque pas du robot tombe sur un nombre entier. Le miroir qui mesurait 0,5 mesure maintenant 0,5 b, qui est une valeur entière pour b pair, et sinon un nombre non entier ayant 5 comme partie décimale. On va alors utiliser le mot de droite correspondant, obéissant à $u_{n+1} = u_n + a\ \ [b]$ avec $u_0 = 0$, en s'aidant aussi des quotients q successifs $[na/b]$. Pour des raisons théoriques nous allons considérer le miroir comme un segment ouvert des deux côtés, de la forme $]0\ b[$, que nous pouvons écrire $[0+\ \ b-]$. La suite (u_n) va nous donner les graduations sur lesquelles tombent les pas élémentaires, ramenés modulo b. Sur une longueur b, le miroir occupe la moitié des graduations et le trou l'autre moitié. Précisons cela dans les deux cas concernés.

Premier cas : *b* pair.

- Reprenons l'exemple de $p = 3 / 10$.

Suite (u)	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0
quotient q	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3

En supposant que l'on part de 0+, les graduations du miroir sont 0+, 1+, 2+, 3+, 4+, et l'on ne prend pas 5+ qui est en dehors du miroir. Le quotient augmente (de 1) pour chaque descente dans la suite (u_n). Juste après une descente, la valeur de u_n est inférieure à $a = 3$, soit 0, 1, 2 et le pas correspondant tombe sur un miroir. Mais on tombe aussi sur un miroir pour les valeurs 3 et 4 de (u_n). Le mot de trajectoire s'obtient en lisant les distances successives entre les valeurs de (u_n) situées entre 0 et 4, celles se produisant après une descente, et les autres.



- Cela se généralise pour les valeurs de p comprises entre 0 et 0,5. Le mot de droite est une permutation des b nombres de $\boldsymbol{Z}_b$. La trajectoire à partir de 0+ s'obtient en prenant les valeurs de u_n entre 0 et $b/2 - 1$: il y a celles juste après une descente, qui sont inférieures à a, et les autres. Ainsi chaque graduation des miroirs est touchée, une fois et une seule. A partir de la trajectoire partant de 0+, on en déduit celles partant de 1+, 2+, …, ($b/2 - 1$)+, qui se déduisent par des décalages cycliques. Par exemple pour 3/10, à partir de 13312 pour 0+, on trouve 12133 pour 1+, 31213 pour 2+, 33121 pour 3+ et 21331 pour 4+. Maintenant, faisons une translation de 0+ à 1- : la trajectoire issue de 0+ ne change pas. Il en est de même pour les autres se déduisant par décalages cycliques. Ainsi sur chacun des points des intervalles [0+ 1-], [1+ 2-], …, la trajectoire est la même. Il y a exactement $b/2$ rubans lumineux, autant que d'intervalles de longueur 1 sur le miroir, donnant $b/2$ trajectoires périodiques, chacune de longueur $b/2$, et celles-ci se déduisent les unes des autres par des décalages cycliques.

* Si $b/2$ est impair, la trajectoire (sur une période) est de longueur impaire, son vecteur final est le même que le vecteur initial. A chaque période, elle repart dans l'autre sens. Il s'ensuit que la trajectoire infinie se projette horizontalement sur un segment de longueur finie. Par exemple pour 3/10, avec la période 12133, la variation d'abscisse est 1-2+1-3+3 = 0, et la projection horizontale des trajectoires est entre -3 et 3.

* Si $b/2$ est pair, la période est de longueur paire, et chaque période redémarre avec le même vecteur, avec un décalage d'abscisse, en règle générale (sauf si l'abscisse finale est la même qu'au départ, comme cela arrive pour 3/8 par exemple). La projection horizontale de la trajectoire devient infinie.[2]

Exemple : 7/20

Suite (u_n) : 0 $\underline{7}$ 11 $\underline{1}$ $\underline{8}$ 15 $\underline{2}$ $\underline{9}$ 16 $\underline{3}$ 10 17 $\underline{4}$ 11 18 $\underline{5}$ 12 19 $\underline{6}$ 13 $\underline{0}$, d'où la période 1 2 1 2 1 2 3 3 3 2. En partant de (0,0) la période se termine en (-1, 7). La période suivante se terminera en (-2, 14), etc.

[2] Dans le cas présent, la longueur d'un trou est paire. La trajectoire issue de 0+ possède un pas élémentaire qui tombe au milieu d'un trou. On est alors dans le cas du billard complémentaire où l'on partait du milieu d'un trou, et l'on retrouve le même résultat.

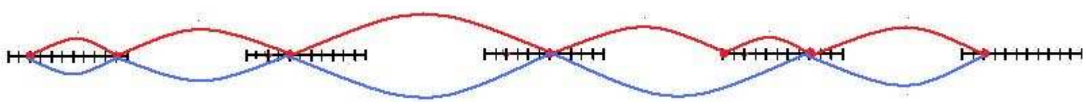
- Lorsque *p* est compris entre 0,5 et 1, il suffit de prendre le mot de droite de pente 1 – *p*, et de le lire de droite à gauche, on aura ainsi la trajectoire cherchée. On peut donc toujours se ramener à une pente comprise entre 0 et 0,5. Par exemple la trajectoire associée à *p* = 7/10, est la même que celle associée à 3/10, mais en lisant celle-ci de droite à gauche, soit à partir de 0+ : 21331.
- Revenons au cas où 0 < *p* < 0,5. Pour savoir combien de fois se trouve la longueur *a* d'un pas élémentaire dans un trou de longueur *b*/2, on forme [*b*/(2*a*)]. Quand le pas élémentaire est à l'intérieur strict d'un trou, la lettre associée dans la trajectoire est [*b*/(2*a*)] + 2. Quand le pas empiète sur un miroir (un plot), à gauche ou à droite, la lettre est [*b*/(2*a*)] + 1. Quand le pas se fait dans un miroir, la lettre est 1. Le mot de trajectoire est formé de trois lettres.

Notamment, dans le cas où 0,25 < *p* < 0,5, le mot de trajectoire est formé des trois lettres 1, 2, 3.

Deuxième cas : *b* impair

Maintenant, en faisant un zoom égal à *b*, le miroir mesure 0,5 *b*, et il présente un nombre entier *b* de graduations de longueur 0,5 (mais pas un nombre entier de graduations de longueur unité). Les graduations entières sur un plot (miroir) sont au nombre de (*b* + 1)/2, et les non entières au nombre de (*b* – 1)/2

Prenons l'exemple de *p* = 4/11. Un plot mesure 5,5, les graduations entières allant de 0 à (*b* – 1)/2 = 5. La suite (u_n) s'écrit :
0 4 8 1 5 9 2 6 10 3 7 0 d'où le mot 1 2 1 2 3 2 de longueur 6 qui donne la trajectoire de 0+ (extrémité gauche du plot). Les trajectoires de 1+, 2+, 3+, 4+, 5+ s'en déduisent, par décalages cycliques. Quand on avance de 0,5– à partir de ces six points à valeurs entières, la trajectoire ne change pas. Mais partons maintenant de 1– : la trajectoire, qui était 1 2 3 2 1 2 pour 1+, devient 12332, de longueur 5, à cause du passage de 0+ à 0 –. Il en est de même pour tous les points de l'intervalle (0,5+ 1-). Le même phénomène se produit sur les intervalles (1,5+, 2-), (2,5+, 3-), (3,5+, 4-), (4,5+, 5-), avec un décalage cyclique dans les trajectoires de longueur 5.



Pour la pente 4/11, avec le plot divisé en 11 parts de 0,5 chacune, trajectoire de 1+ *en rouge* (123212), et trajectoire de 1- *en bleu* (12332)

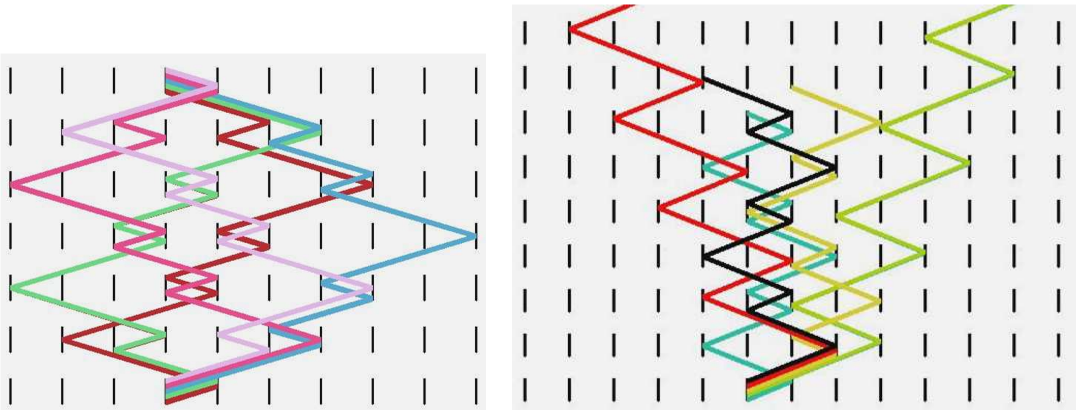
Cela se généralise. Le plot de longueur *b* est découpé en *b* intervalles, d'où partent *b* rubans lumineux. Ceux-ci ont une trajectoire en alternance de longueur (*b* + 1)/2 et de longueur (*b* – 1)/2, les premiers étant au nombre de (*b* + 1)/2 et les seconds au nombre de (*b* – 1)/2. Leur longueur est soit paire, soit impaire : en projection horizontale, une partie des trajectoires reste dans une zone finie, et l'autre s'en va à l'infini (sauf cas exceptionnel où l'abscisse du miroir final est la même que celle du miroir initial).

Comme dans le cas avec *b* pair, on peut se contenter de prendre les pentes entre 0 et 0,5.

Traitement du cas où 0,25 < p < 0,5

Replaçons-nous dans le cadre où le miroir mesure 0,5. Et plaçons-nous sur le plot initial avec un point de départ x compris entre 0+ et 0,5-. En appelant f la fonction faisant passer d'un plot au suivant, et en prenant comme origine des abscisses l'extrémité gauche du plot où l'on tombe, le premier rebond a lieu à l'abscisse $f(x)$, le deuxième en $f^2(x)$, etc. Ce plot initial est découpé en trois parties I_1, I_2, I_3, selon que la trajectoire commence par 1, 2, 3. On vérifie aisément que :

$I_1 = (0,\ 0{,}5 - p)$, et $f(I_1) = (p,\ 0{,}5)$.
$I_3 = (0{,}5 - p,\ 1 - 2p)$, et $f(I_3) = (2p - 0{,}5,\ p)$.
$I_2 = (1 - 2p,\ 0{,}5)$, et $f(I_2) = (0,\ 2p - 0{,}5)$.



Rubans lumineux, *à gauche* pour p = 0,3 (= 3/10) avec $b/2$ = 5 rubans lumineux se projetant horizontalement dans une zone finie, *à droite* pour p = 0,4 (= 2/5) avec b = 5 rubans lumineux, dont deux s'en vont à l'infini en projection horizontale

5) Trajectoire avec une pente irrationnelle

Voici le contexte : Partons d'une grille de miroirs verticaux avec une longueur des trous égale à celle des miroirs (soit 1/2), et lançons un rayon lumineux à partir du centre d'un miroir, avec une pente irrationnelle maintenant.

Le nombre irrationnel correspondant s'écrit sous forme de fractions continuées infinies $[a_0 \,.\, a_1\ a_2\ a_3\ \ldots]$, et les fractions réduites associées P_k / Q_k oscillent autour du nombre irrationnel en s'en approchant de plus en plus près. Ces fractions constituent les approximants rationnels de la pente irrationnelle. Notre objectif est de savoir comment évoluent les mots de droites ayant comme pente ces réduites. Comme deux réduites successives sont proches, avec un dénominateur dont la croissance est donnée par la formule $Q_{k+1} = a_k\, Q_k + Q_{k-1}$, les mots correspondants ont un début qui leur est commun, et il existe une zone où, malgré la faible variation de pente, ce sont exactement les mêmes miroirs qui sont touchés et les mêmes trous traversés. De là on peut chercher à établir des formules de récurrence sur les mots.

Pour fixer les idées, nous allons traiter le cas de la pente irrationnelle égale au nombre d'or $\varphi' = (\sqrt{5} - 1)/2$. Les fractions réduites $F(k)$ sont de la forme $f(k) / f(k+1)$ où $f(k)$ est le nombre de Fibonacci d'ordre k. Ainsi $F(1) = 1 / 1$, $F(2) = 1 / 2$, $F(3) = 2 /$

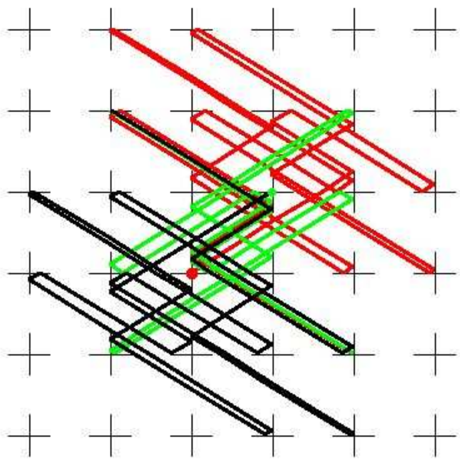
3, $F(4) = 3 / 5$, $F(5) = 5 / 8$, etc. Appelons M_k le mot de droite correspondant à la pente de la réduite d'ordre k. Grâce aux relations sur la suite de Fibonacci, on démontre que :

- $M_{2k} = M_{2k-2}\, M_{2k-3}\, M_{2k-2}$ $(k > 3)$
- $M_{2k+1} = M_{2k}\, M_{2k-3}\, M_{2k-2} = M_{2k-2}\, M_{2k-3}\, M_{2k-2}\, M_{2k-3}\, M_{2k-2}$

à condition de tenir compte de la singularité suivante : pour les fractions réduites de la forme F_{5+6q} , le dénominateur est divisible par 4 et même par 8. On est dans le cas où un miroir est atteint à son extrémité. On considère alors deux cas : on prend cette extrémité et il se produit un rebond lorsque l'on obtient le mot M_{5+6q}. Par contre lorsqu'un mot de cette forme intervient comme partie d'un mot à l'intérieur d'une formule de récurrence (il s'agit alors de M_{2k-3} notamment dans $M_{2k} = M_{2k-2}\, M_{2k-3}\, M_{2k-2}$), on considère que l'extrémité du miroir n'est pas un point de rebond. Ainsi le mot M_{5+6q}, n'est pas exactement le même selon ces deux cas.

Exemples

$M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 3$.
$M_4 = 212$, et l'on a aussi $M_2\, M_1\, M_2 = 212$
$M_5 = 21212$, en prenant l'extrémité d'un miroir comme point de rebond, et l'on a aussi $M_4\, M_1\, M_2 = 21212$. Mais dans la suite on prendra $M_5 = 323$.
$M_6 = \underline{212}\ \underline{3}\ \underline{212} = M_4\, M_3\, M_4$.
$M_7 = \underline{2123212}\ \underline{3}\ \underline{212} = M_6\, M_3\, M_4$.
$M_8 = \underline{2123212}\ \underline{323}\ \underline{2123212} = M_6\, M_5\, M_6$ (à noter que l'on a pris $M_5 = 323$).

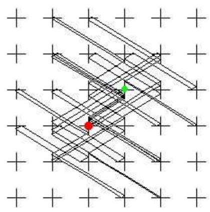


Exemple de la pente $F(10) = 55 / 89$ avec les miroirs croix.
La projection horizontale de la trajectoire donne le mot M_{10} comme concaténation des mots M_8 (*en rouge*), M_7 (*en vert*) et M_8 (*en noir*).

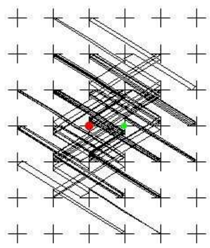
On en déduit que la longueur des mots M_k est toujours impaire, que l'abscisse finale $xf(k)$ décrit un cycle périodique,[3] et que les bornes de la trajectoire subissent une

[3] Grâce aux relations de récurrences sur les mots, on en déduit que l'abscisse finale de la trajectoire obéit aux relations :
$xf(2k) = 2\, xf(2k-2) - xf(2k-3)$ et $xf(2k+1) = 3\, xf(2k-2) - 2\, xf(2k-3)$ avec au départ $xf(1) = 1$, $xf(2) = 2$, $xf(3) = 3$, mais cela sous réserve que les mots de la forme M_{5+6q} donnent la même abscisse finale lorsqu'ils sont écrits des deux façons possibles, ce qui se vérifie expérimentalement pour les premières valeurs. On trouve pour les abscisses $xf(\mathrm{k})$ un cycle périodique de longueur 12, en l'occurrence de $xf(1)$ à $xf(12)$: 1 2 3 3 4 3 3 2 1 1 0 1.

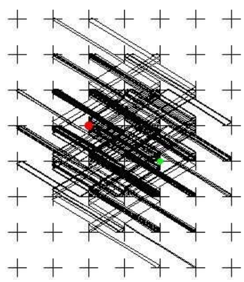
croissance lente. Lorsque *k* augmente, la trajectoire a une grande longueur, soit $f(k+1)$, mais elle reste confinée dans une zone relativement petite autour de l'origine, comme l'indiquent les dessins suivants.



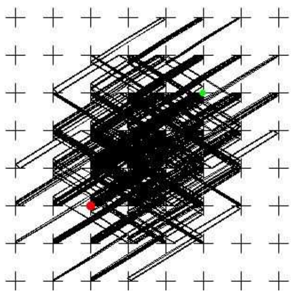
F_{10} = 55 / 89



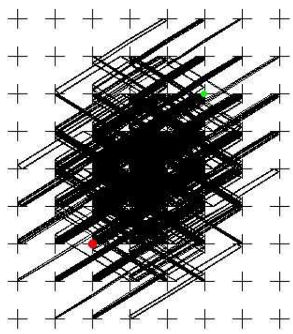
F_{12} = 144 / 233



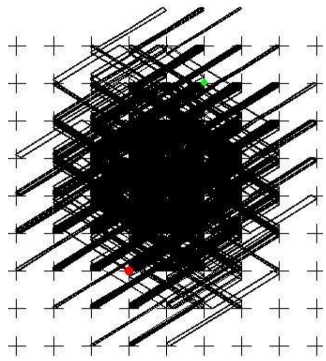
F_{14} = 377 / 610



F_{16} = 987 / 1597



F_{18} = 2584 / 4181



F_{20} = 6765 / 10946

(*en rouge* en *en vert*, le point de départ et le point final de la trajectoire)