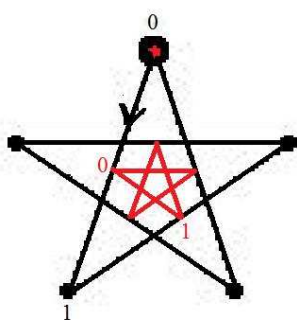


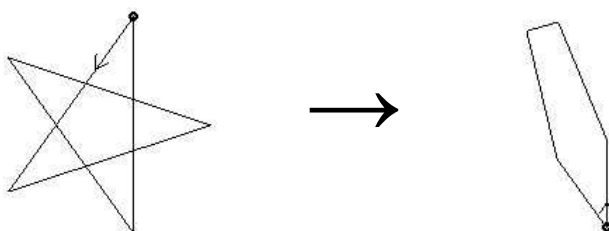
Le paradoxe du pentagone des milieux

Tout commence par un paradoxe, entre la théorie et la pratique. Prenons un pentagone étoilé régulier (inscrit dans un cercle de rayon 1). Les milieux successifs des cinq côtés du pentagone forment à leur tour un pentagone étoilé régulier, pour des raisons évidentes. En grossissant ce pentagone des milieux, on peut s'arranger pour qu'il ait les mêmes dimensions que le pentagone initial (le grossissement à faire est de $4 \cos \pi/5$), il subit seulement une rotation de $2\pi/5$ par rapport au premier. Prenons ensuite les milieux du pentagone obtenu, on a encore un pentagone régulier étoilé, que l'on grossit comme auparavant. Répétons ce passage aux milieux autant de fois que l'on veut, on a toujours un pentagone régulier étoilé qui tourne sur lui-même. Voilà pour la théorie : aux rotations près, le pentagone régulier étoilé est un « point fixe » de l'opération de passage aux milieux.

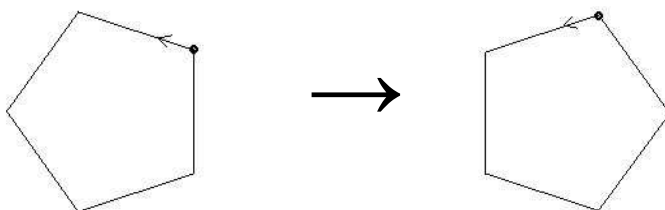


Le pentagone régulier étoilé (de sens direct) et le pentagone des milieux, lui aussi régulier étoilé direct

Maintenant, faisons de même expérimentalement, sur ordinateur. Les coordonnées des points sont des nombres *flottants*, et même des *double*, pour avoir le maximum de précision. Que constate-t-on ? Au bout de quelques itérations de passage aux milieux - une trentaine environ -, on tombe sur un polygone convexe ! Ainsi le fait de ne pas avoir un polygone régulier étoilé parfait au départ, les nombres *double* n'étant qu'une approximation des nombres irrationnels intervenant dans les coordonnées des sommets du pentagone étoilé, cela provoque un renversement de la situation, avec l'apparition de formes convexes.



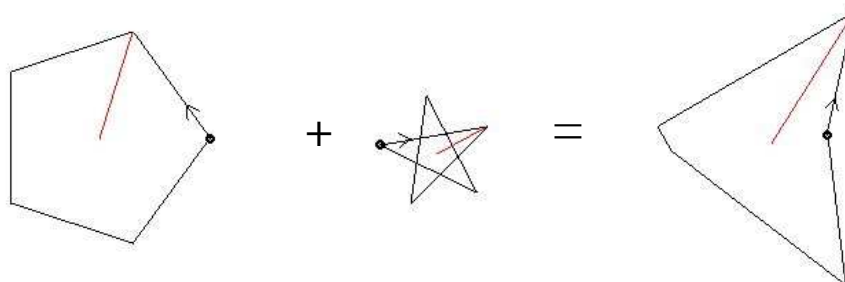
Par contre, si l'on part d'un polygone régulier convexe, on obtient éternellement un polygone régulier convexe.



En termes de « points fixes », l'instabilité des formes polygonales étoilées va de pair avec la stabilité des formes convexes. Il reste à expliquer ce phénomène. Cela va nous conduire à travailler dans l'anneau $\mathbf{C}(z)/(z^n - 1)$, à relier les polygones à des polynômes et à des matrices circulantes, avec de façon sous-jacente une transformée de Fourier.

Polygones, polynômes et matrices circulantes

Un pentagone, et plus généralement un polygone à n sommets numérotés, est défini par les coordonnées de ses n sommets successifs, chacun pouvant s'écrire sous forme d'un nombre complexe, soit $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$. Un polygone p n'est autre qu'un vecteur de \mathbf{C}^n . Dans ces conditions, l'addition de deux polygones ayant le même nombre de sommets se ramène à l'addition de deux vecteurs. Comme dans l'exemple suivant :



Addition du polygone régulier convexe direct (dans le cercle de rayon unité, avec son sommet numéro 0 en (1,0)) et du polygone étoilé indirect dans un cercle de rayon 0,5, et ayant subi une rotation de 3 radians par rapport au polygone de base ayant son sommet 0 au point (1,0). On a dessiné en rouge les vecteurs joignant l'origine O du repère au sommet 1 : l'addition des deux premiers donne le troisième.

Le programme correspondant est simple :

```

/* premier polygone */
for(k=0;k<n;k++) { ax[k]=cos(deuxpi*k/(double)n); ay[k]=sin(deuxpi*k/(double)n); }
dessin
/* deuxième polygone */
for(k=0;k<n;k++) { aax[k]=cos(2.*deuxpi*k/(double)n); aay[k]=-sin(2.*deuxpi*k/(double)n); }
r=0.5; theta=3.;
for(k=0;k<n;k++) /* multiplication des deux nombres complexes r e^{i theta} * aa */
  { oldaax[k]=aax[k];
    aax[k]=r*cos(theta)*aax[k]-r*sin(theta)*aay[k];
    aay[k]=r*cos(theta)*aay[k]+r*sin(theta)*oldaax[k];
  }
dessin
/* somme des deux polygones */
for(k=0;k<n;k++) { aaax[k]=ax[k]+aax[k]; aaay[k]=ay[k]+aay[k]; }
dessin

```

Le passage au polygone des milieux revient à passer de a_0 au milieu $(a_0 + a_1)/2$, de a_1 à $(a_1 + a_2)/2$, ..., de a_{n-1} à $(a_{n-1} + a_0)/2$. Cela revient à faire agir une application linéaire de matrice Q sur le vecteur polygone p , avec :

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et l'on a bien } QP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_0 + a_1)/2 \\ (a_1 + a_2)/2 \\ (a_2 + a_3)/2 \\ (a_3 + a_4)/2 \\ (a_4 + a_0)/2 \end{bmatrix}$$

ici pour $n = 5$.

Cette matrice Q est un cas particulier de matrice circulante. Dans le cas général, une matrice circulante est de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ b_1 & b_0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_4 & b_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \text{ (pour } n=5)$$

avec un décalage cyclique d'un cran lors du passage d'une ligne à la suivante.

Notre problème se généralise à celui de l'action d'une matrice circulante sur un vecteur.

1) Quelques propriétés des matrices circulantes

Considérons la matrice décalage D , de la forme

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ici pour } n = 5.$$

On vérifie aisément que les puissances successives de D s'obtiennent en faisant coulisser en descente les diagonales formées de 1, avec $D^n = I$. Une matrice circulante quelconque Q , comme celle donnée ci-dessus, s'écrit :

$$Q = b_0 I + b_1 D + b_2 D^2 + \dots + b_{n-1} D^{n-1}.$$

Faisons maintenant le produit de deux matrices circulantes, Q avec ses termes b_i et P avec ses termes a_i .

$QP = (b_0 I + b_1 D + b_2 D^2 + \dots + b_{n-1} D^{n-1}) (a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{n-1} D^{n-1})$. Ce produit donne une combinaison linéaire des puissances de la matrice décalage D , de $D^0 = I$ à D^{n-1} , puisque $D^n = I$. Il s'agit donc d'une matrice circulante, et comme les puissances de D commutent, le produit est commutatif, $QP = PQ$.

On constate aussi que cela revient exactement à la multiplication de deux polynômes à coefficients complexes, modulo $z^n - 1$ (ce qui signifie que l'on remplace z^n par 1). Avec $q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_{n-1} z^{n-1}$ et $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$, le produit $q(z) p(z)$ de ces deux polynômes donne le même résultat que le produit QP des matrices, en remplaçant D^i par z^i .

On remarque enfin que le produit QP de la matrice Q avec le vecteur polygone p revient aussi à faire le produit des deux polynômes $q(z)$ $p(z)$ modulo $z^n - 1$. Le résultat de ce produit peut s'écrire comme un vecteur polygone formé des coefficients des puissances successives de z . Il s'agit d'ailleurs de la première colonne de la matrice produit circulante QP . Notre problème se ramène à un produit de polynômes modulo $z^n - 1$.

Par exemple, pour avoir le pentagone des milieux à partir du pentagone $[a_0, a_1, \dots, a_4]$, il suffit de faire le produit :

$$\begin{aligned} & 0,5(1 + z^4) (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4) \text{ avec } z^5 = 1 \\ & = 0,5(a_0 + a_1) + 0,5(a_1 + a_2)z + 0,5(a_2 + a_3)z^2 + 0,5(a_3 + a_4)z^3 + 0,5(a_4 + a_0)z^4 \end{aligned}$$

2) Changement de base

Prenons les n racines $n^{\text{èmes}}$ complexes de l'unité, soit $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$, formant les sommets d'un polygone régulier dans le cercle unité, avec $\omega = e^{i2\pi/n}$ de coordonnées $(\cos 2\pi/n, \sin 2\pi/n)$. On peut aussi bien prendre les conjuguées de ces racines, soit $1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots, \bar{\omega}^{n-1}$, ce qui donne le même polygone régulier mais parcouru dans l'autre sens. Un polynôme $p(z)$ prend les valeurs $p(\bar{\omega}^j)$ sur ces racines conjuguées, et grâce à la formule d'interpolation de Lagrange, on a :

$$p(z) = p(1)L_0(z) + p(\bar{\omega})L_1(z) + p(\bar{\omega}^2)L_2(z) + \dots + p(\bar{\omega}^{n-1})L_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p(\bar{\omega}^j)L_j(z)$$

où les L_j sont les polynômes (uniques) qui valent 1 en $\bar{\omega}^j$ et sont nuls pour toutes les autres racines (conjuguées) de l'unité. On vérifie que :

$$L_j(z) = \frac{1}{n} (1 + \omega^j z + \omega^{2j} z^2 + \omega^{3j} z^3 + \dots + \omega^{(n-1)j} z^{n-1})$$

On vérifie aussi que ces n polynômes forment une famille libre, et par suite une base. Ainsi le polynôme $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$, de coordonnées a_j dans la base $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$, a pour coordonnées $p(\bar{\omega}^j)$ dans la base des L_j .¹ En fait on va plutôt prendre comme base les polynômes K_j tels que :

$$K_j(z) = 1 + \omega^j z + \omega^{2j} z^2 + \omega^{3j} z^3 + \dots + \omega^{(n-1)j} z^{n-1}$$

et dans cette base, le polynôme $p(z)$ a pour coordonnées $\frac{p(\bar{\omega}^j)}{n}$ avec

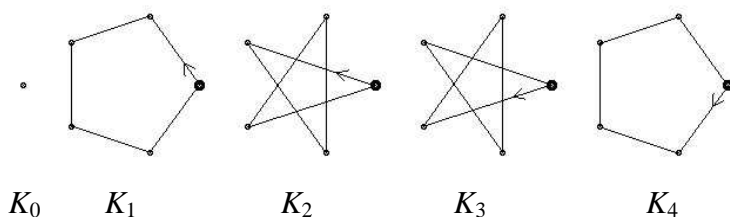
$$p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p(\bar{\omega}^j)}{n} K_j(z)$$

¹ La matrice de passage donnant les anciennes coordonnées a_i par rapport aux nouvelles $p(\bar{\omega}^j)$ a pour vecteurs colonnes des L_j . Inversement, la matrice de passage faisant passer des anciennes aux nouvelles coordonnées est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

Géométriquement, les polynômes K_j sont les polygones obtenus en joignant de j en j les images des n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité à partir de la racine 1. Notamment K_0 est le polygone réduit au point $(1, 0)$, K_1 est le polygone convexe régulier en joignant les racines successives de 1, K_{n-1} est le même polygone convexe mais parcouru dans le sens rétrograde, K_2 est le polygone régulier obtenu en joignant les racines de deux en deux, et il est étoilé pour n impair ...

Pour $n = 5$, on a les cinq polygones de base suivants :



Tout polygone à n sommets numérotés de 0 à $n - 1$ est une combinaison linéaire de ces n polygones de base K_j . Remarquons que par translation on peut toujours s'arranger pour que le polygone initialement choisi ait son centre de gravité en l'origine O du repère. Dans ces conditions, la coordonnée associée à K_0 devient nulle, puisque $p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$, et l'on n'a plus à faire jouer le polygone point K_0 .

Evolution de polygones sous l'action répétée d'une application linéaire de matrice Q circulante

On dispose de la propriété suivante, facile à vérifier : Une matrice circulante Q , correspondant à un polynôme $q(z)$, a pour vecteurs propres les vecteurs K_j précédemment définis, et les valeurs propres associées sont $\lambda_j = q(\bar{\omega}^j)$.

Faisons agir l'application de matrice Q sur un polygone p . On obtient un polygone p' tel que $p' = Q p$. En termes de polynômes (modulo $z^n - 1$ comme toujours), cela s'écrit $p'(z) = q(z) p(z)$. Dans la base des vecteurs propres K_j , le polygone p a pour coordonnées $\frac{p(\bar{\omega}^j)}{n}$ et le polygone p' a pour coordonnées $\frac{p(\bar{\omega}^j)}{n} \lambda_j = \frac{p(\bar{\omega}^j)}{n} q(\bar{\omega}^j)$, par définition des valeurs propres.² Si l'on répète l'opération k fois, sous l'effet de Q^k on obtient le polygone de coordonnées $\frac{p(\bar{\omega}^j)}{n} \lambda_j^k$. Dès lors toute l'évolution des polygones dépend des valeurs propres λ_j , c'est-à-dire des valeurs du polynôme $q(z)$ en $\bar{\omega}^j$.

1) L'exemple des polygones des milieux

Partons d'un polygone p à n sommets, de centre de gravité O . En prenant les milieux des côtés successifs, on obtient le polygone $p' = Q p$, et le polynôme opérateur faisant

² Constatons au passage qu'il est beaucoup plus facile de faire le produit de deux polynômes dans la base des K_j que dans la base canonique. C'est justement une des raisons d'être de la transformée de Fourier.

passer de $p(z)$ à $p'(z)$ est $q(z) = 0,5 (1 + z^{n-1})$ comme on l'a vu, soit $p'(z) = q(z) p(z)$. Les valeurs propres associées sont :

$$\lambda_j = q(\bar{\omega}^j) = 0,5 (1 + \bar{\omega}^{j(n-1)}) = 0,5 (1 + \omega^j)$$

Les modules des valeurs propres, sans compter λ_0 qui ne joue aucun rôle, sont tous strictement inférieurs à 1. Par itération du processus, les polygones des milieux successifs convergent vers le polygone point O , puisque chacune des coordonnées associées à la base des K_j tend vers 0, sous l'effet des puissances successives des valeurs propres. Pour éviter cet effet réducteur, on peut pratiquer un zoom à chaque étape, ce qui revient à multiplier le polynôme $q(z)$ par le nombre réel *zoom* (supérieur à 1).

2) Ajout d'un grossissement

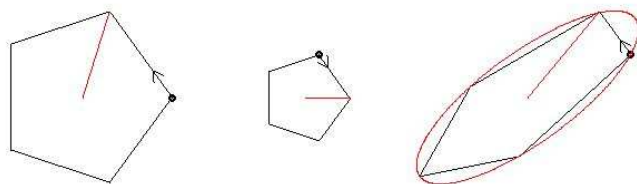
Par exemple, partons d'un pentagone étoilé quasiment régulier, de sens direct et inscrit dans le cercle unité. Dans la base des polygones de base K_j , il se décompose en K_2 seulement, les autres composantes étant quasiment nulles. On a vu géométriquement que le polygone des milieux voit ses dimensions réduites suivant le rapport $1 / (4 \cos(\pi/5))$, ou encore il devient $\lambda_2 K_2$, avec $|\lambda_2| = \cos(2\pi/5)$, et l'on peut vérifier que l'on a bien $1 / (4 \cos(\pi/5)) = \cos(2\pi/5)$. Pour empêcher cet effet réducteur, provoquons un grossissement de $1 / |\lambda_2| = 1 / \cos(2\pi/5)$. Dans ces conditions la répétition des polygones des milieux, grossis à chaque fois, conserve la composante K_2 (ainsi que la minuscule composante εK_3 puisque $|\lambda_2| = |\lambda_3|$), mais les composantes associées aux polygones convexes K_1 et K_4 sont à chaque fois multipliées en module par $|\lambda_1| / |\lambda_2| > 1$. Ces composantes, si minuscules soient-elles au départ, grossissent à chaque fois, et dépassent rapidement les composantes immuables K_2 et K_3 , au point de devenir infiniment grandes, rendant négligeables les composantes K_2 et K_3 . C'est cela qui fait que le polygone des milieux, étoilé au départ, finit par devenir convexe. Pour s'en assurer, montrons que toute combinaison linéaire de K_1 et K_4 donne un polygone convexe.

Prenons le pentagone K constitué par la combinaison $K_1 + k e^{i\varphi} K_4$, où K_4 subit une similitude de rapport $k > 0$ et d'angle φ (entre 0 et 2π).

Commençons par le cas où $\varphi = 0$, avec $K = K_1 + k K_4$. On constate que les sommets du pentagone K ont leurs coordonnées qui vérifient $x = (1 + k) \cos t$, $y = (1 - k) \sin t$, pour les valeurs successives de t valant 0, $2\pi/5$, $4\pi/5$, ... Lorsque k est inférieur à 1, $x = (1 + k) \cos t$, $y = (1 - k) \sin t$ sont les équations paramétriques d'une ellipse (de centre O et d'axes Ox et Oy) parcourue dans le sens direct lorsque t augmente. Lorsque k est supérieur à 1, on a aussi une ellipse, mais parcourue dans le sens indirect quand t augmente. Cela signifie que le pentagone K est convexe.

Prenons maintenant $\varphi = 2\pi/5$. On trouve que les sommets du polygone K sont situés sur une ellipse qui se déduisent de celle précédemment trouvée par une rotation de centre O et d'angle $\pi/5$. L'équation de cette ellipse est, en complexes :

$z = e^{i(t + \pi/5)} + k e^{-i(t - \pi/5)}$ et l'on vérifie que les sommets de K sont situés sur cette ellipse, en tournant dans le sens direct pour $k < 1$.



L'addition des deux polygones K_1 et $0,5e^{i2\pi/5}K_4$ (à gauche) donne le polygone convexe (à droite), inscrit dans une ellipse tournée de $\pi/5$ par rapport à l'horizontale

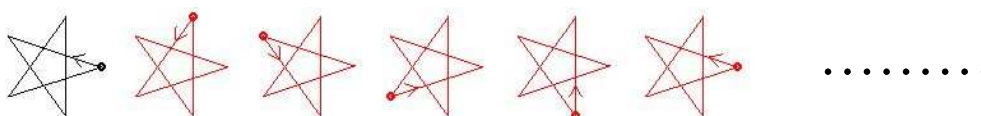
Il en est de même pour les angles φ multiples de $2\pi/5$, avec une ellipse tournée d'un angle égal à $\varphi/2$. L'ellipse tourne par à-coups jusqu'à faire un demi-tour. Mais pour les valeurs intermédiaires, par exemple entre 0 et $2\pi/5$?

Commençons par remarquer que le raisonnement fait pour les pentagones se généralise à tout polygone de la forme $K_1 + k e^{i 2j\pi/n} K_{n-1}$, et notamment à $K_1 + k e^{i 2j\pi/5q}$. K_{5q-1} . Si l'on prend les polygones réguliers convexes K_1 et K_{5q-1} ayant $5q$ sommets, les sommets du polygone $K_1 + k e^{i 2j\pi/5q}$ se trouvent sur une ellipse tournée d'un angle de $j\pi/(5q)$. Mais les deux pentagones convexes de base sont une partie de ces polygones, lorsqu'on les parcourt de q en q sommets, et lorsque j augmente, l'ellipse tourne par à-coups de $\pi/(5q)$. Comme q peut être pris très grand, les angles $j\pi/(5q)$ peuvent être rendus aussi petits que l'on veut, et balayent le secteur angulaire entre 0 et $2\pi/5$. On a bien dans tous les cas un polygone K convexe.

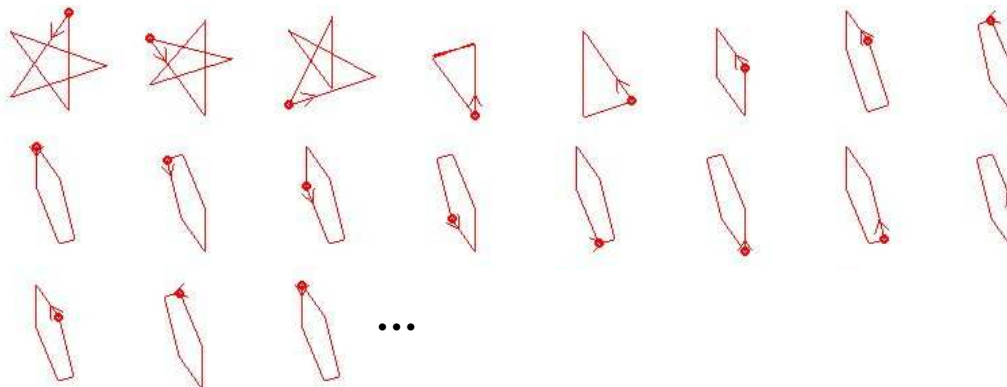
Le paradoxe initial se trouve finalement expliqué. Sur ordinateur, on n'a jamais un pentagone régulier étoilé parfait au départ. Les composantes associées à K_1 et K_4 , si petites soient-elles, ne sont pas nulles. Après une série de changements imperceptibles, le pentagone des milieux semblant immuable, il se défroisse tout à coup de façon visible, et de plus en plus fortement, pour se retourner comme une crêpe et devenir convexe à jamais.

Maintenant que l'on a compris le phénomène, à partir du pentagone étoilé presque régulier, il reste à régler le grossissement de façon à empêcher que les pentagones des milieux deviennent trop petits (si le grossissement vaut 1) ni trop grands et même infiniment grands pour le grossissement de $1 / |\lambda_2|$ comme on l'a fait précédemment. On décide de faire en sorte que le sommet le plus loin de l'origine soit toujours à une distance unité, avec un zoom égal à l'inverse de cette distance maximale. Que se passe-t-il alors ? Au cours du processus, le grossissement ainsi calculé va varier. Au début on a le pentagone étoilé qui conserve ses dimensions en subissant seulement une rotation, ce qui correspond à un grossissement de l'ordre de $1 / |\lambda_2|$, mais plus tard, lorsque le pentagone est devenu convexe, ce sont les pentagones de base K_1 et K_4 qui conservent leurs dimensions, et le grossissement est de l'ordre de $1 / |\lambda_1|$. Comme l'argument de la valeur propre λ_1 est de $\pi/5$, les pentagones K_1 et K_4 tournent chacun de cet angle en sens contraire l'un par rapport à l'autre. et pour le pentagone somme $K_1 + k e^{i\varphi} K_4$, il redevient identique à lui-même tous les 10 coups, et l'on observe que ses sommets tournent à chaque coup en restant sur la même ellipse.

Premières itérations, pas de changements visibles



Premières modifications, puis le retournement, et finalement la formation du polygone convexe qui tourne sur une ellipse et redevenant identique à lui-même tous les dix coups



Programme

1) Calculs préliminaires et polygone initial

On commence par se donner n , le nombre de sommets du polygone. Puis on calcule les parties réelle et imaginaire de la racine $n^{\text{ème}}$ ω de 1, soit $(\text{omegax}, \text{omegay})$. Cela permet de construire les polygones de base K_j dont les sommets successifs sont les nombres complexes $[1, \omega^j, \omega^{2j}, \omega^{3j}, \dots, \omega^{(n-1)j}]$, pour j entre 0 et $n-1$. Dans le programme, on remplit peu à peu les tableaux $(Kx[n][n], Ky[n][n])$, où la variable $(\text{racx}, \text{racy})$ correspondant au nombre complexe rac contient successivement $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$. On obtient le $k^{\text{ème}}$ sommet K_{jk} du polygone K_j en multipliant $K_{j, k-1}$ par rac . Rappelons que le produit de deux nombres complexes $x + iy$ et $x' + iy'$ a pour partie réelle $xx' - yy'$ et pour partie imaginaire $xy' + x'y$.

```
omegax=cos(deuxpi/(double)n);omegay=sin(deuxpi/(double)n);
racx=1.; racy=0.;
for(j=0;j<n;j++)
{ Kx[j][0]=1.; Ky[j][0]=0.;
  for(k=1;k<n;k++)
  { Kx[j][k]=Kx[j][k-1]*racx-Ky[j][k-1]*racy; Ky[j][k]=Kx[j][k-1]*racy+Ky[j][k-1]*racx; }
  oldracx=racx; racx=racx*omegax - racy*omegay ; racy=oldracx*omegay + racy*omegax ;
}
```

Pour vérifier, on affiche sur l'écran ces n polygones de base, en faisant :

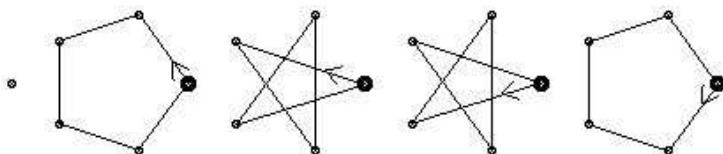
```
xorig=10;yorig=300;
for(j=0;j<n;j++)
{ for(k=0;k<n;k++)
  { cercle(xorig+zoom*Kx[j][k],yorig-zoom*Ky[j][k],2,noir);
    ligne(xorig+zoom*Kx[j][k],yorig-zoom*Ky[j][k],
          xorig+zoom*Kx[j][(k+1)%n],yorig-zoom*Ky[j][(k+1)%n],noir) ;
  }
  xorig+=100;
```



```

}
SDL_Flip(ecran); pause(); SDL_FillRect(ecran,0,blanc);

```



cas où $n = 5$

Prenons maintenant le polygone de départ, dont les coordonnées des sommets sont placés dans les tableaux $ax[n]$ et $ay[n]$. Dans l'exemple choisi, on a pris un polygone étoilé presque régulier. Son centre de gravité est (gx, gy) . Puis par translation, on fait en sorte de modifier le polygone pour que son centre de gravité soit en O , origine du repère, le nouveau polygone de départ étant toujours dans $ax[]$ et $ay[]$. On est ainsi assuré que tous les polygones successifs des milieux auront leur centre de gravité en O .

```

ax[0]=1.;ay[0]=0.; ax[1]=-1.4;ay[1]=0.85; ax[2]=0.1;ay[2]=-1.3;
ax[3]=0.1;ay[3]=1.3; ax[4]=-1.4;ay[4]=-0.85;

```

```

gx=ax[0];gy=ay[0];
for(k=1;k<n;k++) { gx+=ax[k]; gy+=ay[k]; }
gx=gx/(double)n; gy=gy/(double)n;
for(k=0;k<n;k++) { ax[k]=ax[k]-gx; ay[k]=ay[k]-gy; }
dessin(100,100,ax,ay,noir); SDL_Flip(ecran);pause();

```

Ce polygone P (associé au polynôme $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$) se décompose en une combinaison des polygones de base K . Il est de la forme :

$$\frac{p(1)}{n} K_0 + \frac{p(\bar{\omega})}{n} K_1 + \frac{p(\bar{\omega}^2)}{n} K_2 + \dots + \frac{p(\bar{\omega}^{n-1})}{n} K_{n-1}$$

Dans le programme, le coefficient $\frac{p(\bar{\omega}^k)}{n}$ du polygone de base K_k est noté $(coox[k], cooy[k])$ puisqu'il s'agit des coordonnées du polygone P dans la base des polygones K . La variable rac ($racx, racy$) contient successivement les puissances $1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots$ du conjugué de ω . Et pour chaque valeur de k , la valeur du polynôme $p(\bar{\omega}^k)$ est calculée par cumul, en utilisant la variable $rrac$ ($rracx, rrac$).

```

racx=1.; racy=0.;
for(k=0;k<n;k++)
{ coox[k]=ax[0]; cooy[k]=ay[0];
  racx=racx; racy=racy;
  for(l=1;l<n;l++)
  { coox[k]+=ax[l]*racx - ay[l]*rracy; cooy[k]+=ax[l]*rracy + ay[l]*racx;
    oldracx=racx; racx=racx*racx- racy*rracy; rrac=oldracx*rracy+ rrac*racy;
  }
  coox[k]=coox[k]/(double)n; cooy[k]=cooy[k]/(double)n;
  oldracx=racx; racx=omegax*racx+omegay*rracy; rrac=omegax*rracy-omegay*oldracx;
}

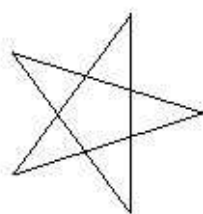
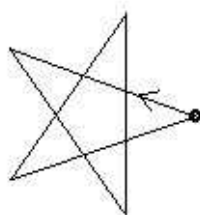
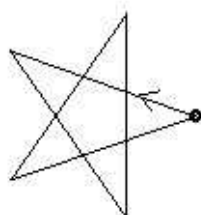
```

Il reste à dessiner la décomposition du polygone P en ces n polygones de base, chacun étant multiplié par ses coordonnées.

```
xorig=30; yorig=280;
for(j=0;j<n;j++)
  { for(k=0;k<n;k++)
    { ligne(xorig+zoom*(Kx[j][k]*coox[j]- Ky[j][k]*cooy[j]),
yorig-zoom*(Kx[j][k]*cooy[j]+Ky[j][k]*coox[j]),
xorig+zoom*(Kx[j][(k+1)%n]*coox[j]- Ky[j][(k+1)%n]*cooy[j]),
yorig-zoom*(Kx[j][(k+1)%n]*cooy[j]+Ky[j][(k+1)%n]*coox[j]),noir);
    }
  xorig+=130;
}
```

En guise de vérification, on peut reconstruire le polygone P en additionnant les polygones de base K par leurs coordonnées. Les coordonnées du polygone P ainsi refabriqué sont placées dans les tableaux ($aax[], aay[]$)

```
for(k=0;k<n;k++)
  { aax[k]=coox[0]*Kx[0][k] - cooy[0]*Ky[0][k]; aay[k]=coox[0]*Ky[0][k] + cooy[0]*Kx[0][k];
  for(l=1;l<n;l++)
    { aax[k]=aax[k]+coox[l]*Kx[l][k] - cooy[l]*Ky[l][k];
      aay[k]=aay[k]+coox[l]*Ky[l][k] + cooy[l]*Kx[l][k];
    }
  }
dessin(300,100,aax,aay,noir); SDL_Flip(ecran);pause();SDL_FillRect(ecran,0,blanc);
```



En haut à gauche, le polygone P de départ, *à droite* le polygone P reconstruit à partir de sa décomposition, et *en bas*, la décomposition du polygone P suivant les cinq polygones de base. On constate que seule la composante correspondant au polygone étoilé régulier direct K_2 intervient, les autres étant quasiment réduites à des points.

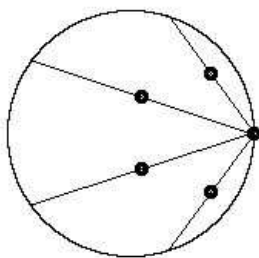
Il reste à calculer les valeurs propres λ_j dont on aura besoin pour avoir les polygones des milieux. On a vu que $\lambda_j = 0,5 (1 + \omega^j)$. Les coordonnées des valeurs propres sont placées dans ($lambdax[], lambday[]$). Les points correspondant à ces valeurs propres sont les sommets du polygone régulier de dimension moitié de celle du polygone

régulier à n sommets inscrit dans le cercle unité (la formule $\lambda_j = 0,5 (1 + \omega^j)$ correspondant à une homothétie de centre (1,0) et de rapport 0,5).

```

racx=1.; racy=0.;
for(j=0;j<n;j++)
  { lambdax[j]=0.5*(1.+racx); lambday[j]=0.5*racy;
    oldracx=racx; racx=omegax*racx-omegay*racy; racy=omegax*racy+omegay*oldracx;
  }
xorig=300;yorig=200; cercle(xorig,yorig,zoom,noir);
for(j=0;j<n;j++) cercle(xorig+zoom*lambdax[j],yorig-zoom*lambday[j],2,noir);
SDL_Flip(ecran);pause();SDL_FillRect(ecran,0,blanc);

```



Valeurs propres pour $n = 5$

2) Boucle des étapes et polygones des milieux successifs

On a vu que le premier polygone des milieux s'obtient comme combinaison linéaire des polygones de base K_i , avec comme coefficients $\frac{p(\bar{\omega}^i)}{n} \lambda_i$, c'est-à-dire en multipliant les coefficients du polygone initial P par les valeurs propres respectives. Dans le programme, les sommets de ce polygone des milieux sont placés dans les tableaux ($aax[]$, $aay[]$). Après ce calcul, on provoque un grossissement du dessin, de façon que le sommet le plus éloigné de l'origine soit à une distance restant égale à 1.

```

for(k=0;k<n;k++)
  { aax[k]=lambdax[0]*(coox[0]*Kx[0][k] - cooy[0]*Ky[0][k])-lambday[0]*(coox[0]*Ky[0][k] +
cooy[0]*Kx[0][k]);
    aay[k]=lambdax[0]*(coox[0]*Ky[0][k] + cooy[0]*Kx[0][k])+lambday[0]*(coox[0]*Kx[0][k] -
cooy[0]*Ky[0][k]);
    for(l=1;l<n;l++)
      { aax[k]=aax[k]+lambdax[l]*(coox[l]*Kx[l][k] - cooy[l]*Ky[l][k]) -lambday[l]*(coox[l]*Ky[l][k]
+ cooy[l]*Kx[l][k]);
        aay[k]=aay[k]+lambdax[l]*(coox[l]*Ky[l][k] + cooy[l]*Kx[l][k])+lambday[l]*(coox[l]*Kx[l][k]
- cooy[l]*Ky[l][k]);
      }
    }
max=0.;
for(j=0;j<n;j++) if (aax[j]*aax[j]+aay[j]*aay[j]>max) { max=aax[j]*aax[j]+aay[j]*aay[j]; }
grossissement=1./sqrt(max);
for(j=0;j<n;j++) { aax[j]=grossissement*aax[j];aay[j]=grossissement*aay[j];}

```

C'est seulement maintenant que l'on lance la boucle des étapes. A chaque étape, le polygone des milieux est fabriqué de deux façons, soit en prenant les milieux des côtés, ce qui donne des sommets dans ($aaax[]$, $aaay[]$), ensuite remis après grossissement dans

($ax[]$, $ay[]$), soit en utilisant sa décomposition suivant les polygones de base K , comme cela a été calculé ci-dessus pour le premier polygone des milieux avant la boucle, le dessin étant fait au début de la boucle des étapes, et les calculs du futur polygone des milieux étant faits à la fin de la boucle, donnant lieu aux sommets placés dans ($aaax[]$, $aaay[]$). Dans la même boucle, la décomposition du polygone des milieux suivant les polygones de base est faite, permettant de voir l'évolution de ces polygones, avec la disparition des polygones étoilés au profit des polygones convexes.

```

for(etape=1;etape<nombreetapes;etape++)
{
    /***** dessin du polygone des milieux aa *****/
    dessin(400,100,aaax,aaay,noir);

    /***** redessin du polygone des milieux aaa (puis a) à partir de a *****/
    for(j=0;j<n;j++) {aaax[j]=0.5*(ax[j]+ax[(j+1)%n]);aaay[j]=0.5*(ay[j]+ay[(j+1)%n]);}
    max=0.;
    for(j=0;j<n;j++) if (aaax[j]*aaax[j]+aaay[j]*aaay[j]>max) {max=aaax[j]*aaax[j]+aaay[j]*aaay[j]; }
    grossissement=1./sqrt(max);
    for(j=0;j<n;j++) {ax[j]=grossissement*aaax[j];ay[j]=grossissement*aaay[j];}
    dessin(100,100,ax,ay,rouge);
    /***** décomposition du polygone sur la base K *****/
    racx=1.;racy=0.; printf("\n");
    for(k=0;k<n;k++)
    { coox[k]=ax[0];cooy[k]=ay[0];
      rracx=racx;rracy=racy;
      for(l=1;l<n;l++)
      { coox[k]+=ax[l]*rracx - ay[l]*rracy;
        cooy[k]+=ax[l]*rracy + ay[l]*rracx;
        oldrracx=rracx;
        rracx=rracx*racx- rracy*racy; rracx=oldrracx*racy+ rracy*racx;
      }
      coox[k]=coox[k]/(double)n; cooy[k]=cooy[k]/(double)n;
      r[k]=sqrt(coox[k]*coox[k]+cooy[k]*cooy[k]); printf("\n%3.5lf",r[k]);
      oldracx=racx;
      racx=omegax*racx+omegay*racy; racy=omegax*racy-omegay*oldracx;
    }
    xorig=30; yorig=280;
    for(j=0;j<n;j++)
    { for(k=0;k<n;k++)
      { ligne(xorig+zoom*(Kx[j][k]*coox[j]- Ky[j][k]*cooy[j]),
        yorig-zoom*(Kx[j][k]*cooy[j]+Ky[j][k]*coox[j]),
          xorig+zoom*(Kx[j][(k+1)%n]*coox[j]- Ky[j][(k+1)%n]*cooy[j]),
          yorig-zoom*(Kx[j][(k+1)%n]*cooy[j]+Ky[j][(k+1)%n]*coox[j]),noir);
        }
      xorig+=130;
    }
    SDL_Flip(ecran);pause();SDL_FillRect(ecran,0,blanc);

    /***** calcul du futur polygone des milieux dans aa *****/
    for(k=0;k<n;k++)
    {aaax[k]=lambdax[0]*(coox[0]*Kx[0][k] - cooy[0]*Ky[0][k])-lambday[0]*(coox[0]*Ky[0][k] +
    cooy[0]*Kx[0][k]);
      aaay[k]=lambdax[0]*(coox[0]*Ky[0][k] + cooy[0]*Kx[0][k])+lambday[0]*(coox[0]*Kx[0][k] -
    cooy[0]*Ky[0][k]);
      for(l=1;l<n;l++)
      {aaax[k]=aaax[k]+lambdax[l]*(coox[l]*Kx[l][k] - cooy[l]*Ky[l][k]) -lambday[l]*(coox[l]*Ky[l][k]
    + cooy[l]*Kx[l][k]);
        aaay[k]=aaay[k]+lambdax[l]*(coox[l]*Ky[l][k] + cooy[l]*Kx[l][k])+lambday[l]*(coox[l]*Kx[l][k]
    - cooy[l]*Ky[l][k]);
      }
    }
}

```

```

    }
  }
  max=0.;
  for(j=0;j<n;j++) if (aax[j]*aax[j]+aay[j]*aay[j]>max) { max=aax[j]*aax[j]+aay[j]*aay[j]; }
  grossissement=1./sqrt(max);
  for(j=0;j<n;j++) { aax[j]=grossissement*aax[j];aay[j]=grossissement*aay[j];}
  }
  pause();return 0;
  }

```

Accessoirement nous donnons la fonction qui permet de dessiner les polygones au fil de leur évolution :

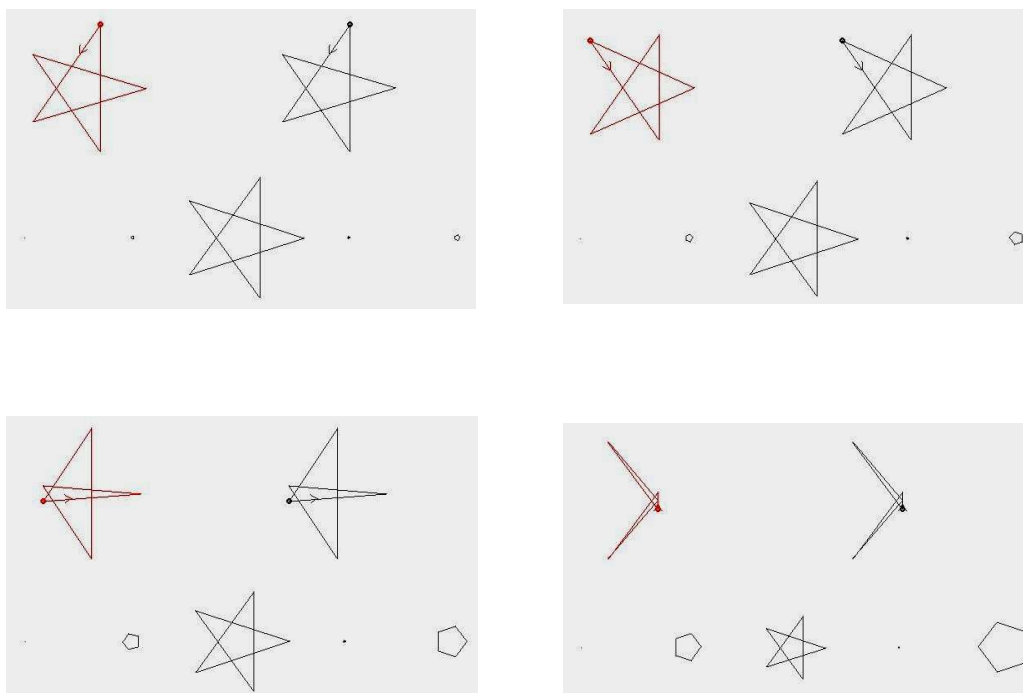
```

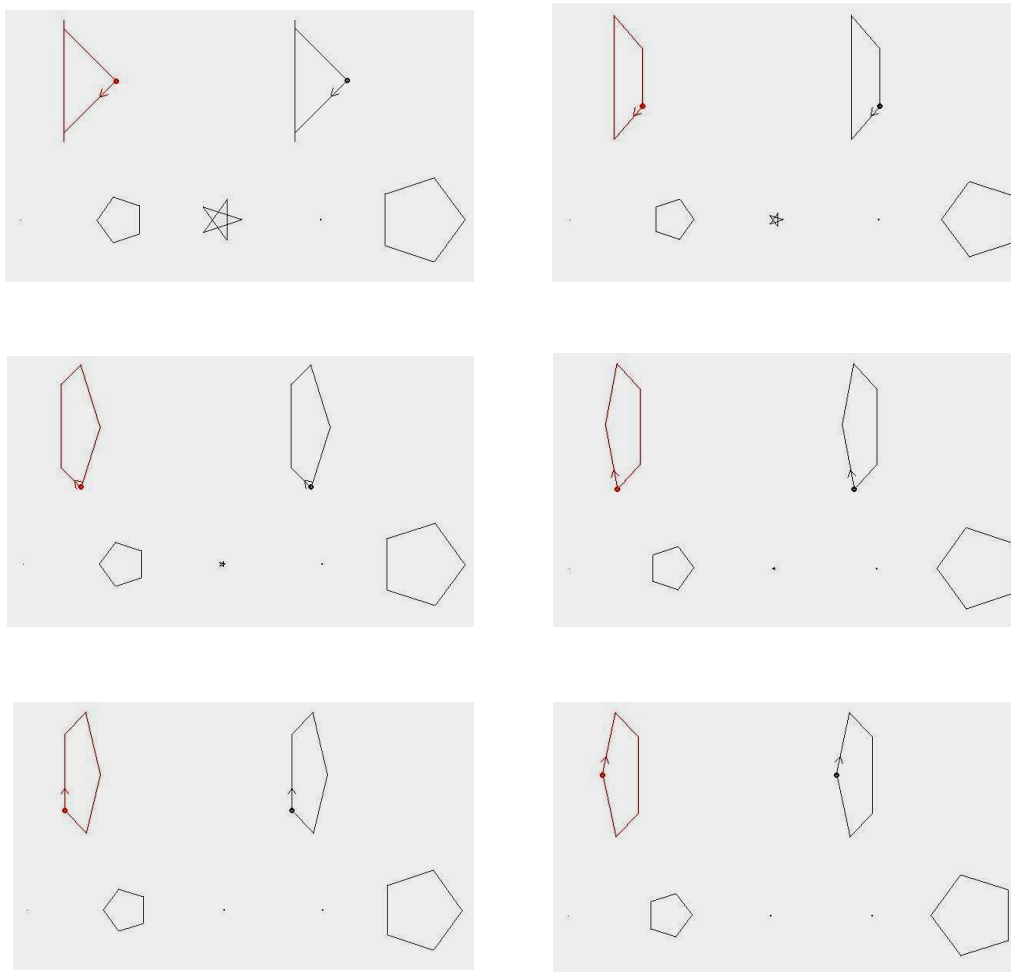
void dessin(int xorig, int yorig, double * aaaax, double * aaaay, Uint32 color)
{ int k;
  for(k=0;k<n;k++)
  { ligne(xorig+zoom*aaaax[k],yorig-zoom*aaaay[k],
          xorig+zoom*aaaax[(k+1)%n],yorig-zoom*aaaay[(k+1)%n],color);
  }
  cercle(xorig+zoom*aaaax[0],yorig-zoom*aaaay[0],3,color); /* sommet 0 */
  fleche(xorig+zoom*aaaax[0],yorig-zoom*aaaay[0],xorig+zoom*aaaax[1],yorig-zoom*aaaay[1],
color); /* flèche donnant la direction du sommet 0 vers le sommet 1 */
}

```

3) Résultats

On observe ci-dessous l'évolution des pentagones des milieux, avec sur chaque dessin, en haut à gauche et à droite le pentagone des milieux calculé par deux méthodes, et au-dessous sa décomposition suivant les pentagones de base.





Remarques complémentaires

- Quel que soit n , les valeurs propres λ_1 et λ_{n-1} sont toujours les plus grandes en module. Ce sont les formes convexes correspondantes qui l'emportent par passage aux milieux.

- Ce que l'on a fait avec les milieux peut être généralisé à tout barycentre de deux sommets successifs, en considérant le polynôme opérateur $q(z) = 1 - k + k z^{n-1}$ (on retrouve le milieu pour $k = 0,5$).

- Considérons plus généralement une matrice circulante quelconque Q , mais à coefficients réels b_j , faisant passer d'un polygone p au polygone $p' = Q p$. On obtient $p'(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_{n-1} z^{n-1}$, avec notamment $A_0 = b_0 a_0 + b_{n-1} a_1 + b_{n-2} a_2 + \dots + b_1 a_{n-1}$,

les autres A_j s'en déduisant par permutation circulaire. Or le barycentre des n sommets du polygone p affectés des coefficients respectifs $b_0, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$, est le point d'affixe le nombre complexe

$A'_0 = (b_0 a_0 + b_{n-1} a_1 + b_{n-2} a_2 + \dots + b_1 a_{n-1}) / \sum b_j$, sous réserve que ce barycentre existe, c'est-à-dire que la somme des coefficients b_j soit non nulle. Ainsi, à un grossissement près (lié à $1 / \sum b_j$), chaque sommet du polygone p est transformé en un certain barycentre des n sommets, aboutissant au polygone p' . La même transformation,

réalisée dans la base des polygones K_j , consiste à multiplier chacun des polygones de base par sa valeur propre associée complexe λ_j , ce qui revient à faire des similitudes.

- Inversibilité du phénomène : pour savoir si l'application de matrice Q est inversible, plaçons-nous dans la base des K_j , où la matrice est diagonale. La matrice Q est inversible si et seulement si aucune des valeurs propres n'est nulle, auquel cas la matrice Q^{-1} admet pour valeurs propres les inverses de celles de Q . Par exemple, pour le polygone des milieux avec $n = 5$, le polynôme associé $q(z) = 1 + z^4$ a pour inverse le polynôme :

$$q^{-1}(z) = 1 + z - z^2 + z^3 - z^4,$$

et l'on a une formule analogue pour tout n impair. Comme les valeurs propres forment un polygone régulier ayant un sommet en $(1,0)$, aucune n'est nulle lorsque n est impair. Par contre pour n pair, on a toujours $q(\omega^{n/2}) = 0$ et il n'y a pas d'inverse.

Ainsi, avec n impair, on peut partir d'un polygone convexe presque régulier, et l'on arrive, par itérations successives (chaque nouveau polygone ayant pour milieux de ses côtés les sommets du polygone précédent), à un polygone étoilé, puisque les valeurs propres dominantes sont maintenant les plus petites en module, par exemple celles des K_2 et K_3 pour $n = 5$, et plus généralement $K_{(n-1)/2}$ et $K_{(n+1)/2}$ pour n impair quelconque.

Références bibliographiques

- P. Audibert, *Ordre et chaos*, mémoire de DEA, 1992.
- P. Audibert, *Calcul, chaos, modulo*, thèse Université Paris 8, 1998.
- C. Lenormand, *Numérique, non-numérique*, support de cours, Paris 8, 1995.
- P. Naudin, C. Quitté, *Algorithmique algébrique*, Masson 1992.