

Quasi-cristaux. La méthode de coupe et projection

Ce qui suit constitue un prolongement du texte *droites et géométrie discrète* (in *travaux exploratoires*, Pierre Audibert LIASD). Nous y avons vu que la droite D passant par l'origine O du repère et de pente irrationnelle φ' (un nombre d'or) était approchée par un chemin rasant par en-dessous, à base de traits unitaires horizontaux ou verticaux, obéissant à la rythmique de Fibonacci (substitutions $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 10$ à partir de 1). Ainsi, par projection sur la droite, on obtenait une succession de pavés de deux types, longs par projection d'un trait horizontal, et courts par projection d'un trait vertical. Ces pavés longs et courts sont en bleu et en rouge sur la *figure 1*, aboutissant au pavage de Fibonacci sur la droite D . On a aussi montré que les points du chemin rasant en-dessous sont tous situés dans une bande de largeur L (avec dans le cas présent $L = \varphi \cos \alpha$).

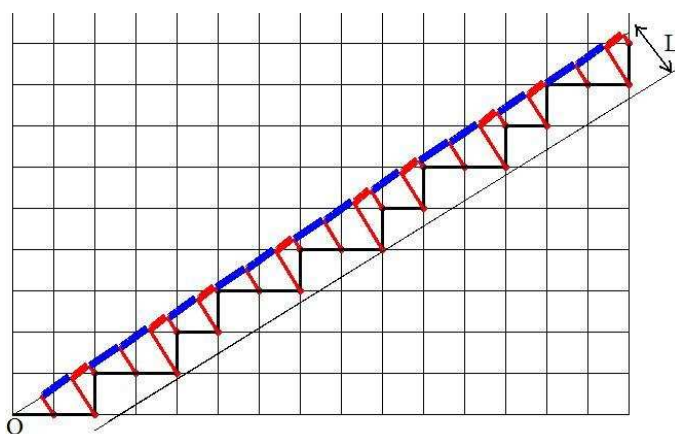


Figure 1 : Le pavage de Fibonacci, par projection du chemin rasant sous la droite de pente φ' . Il correspond au mot $10110101101101011010110...$, le 1 étant associé au pavé long en bleu, et le 0 au pavé court en rouge.¹

Surfaces atomiques

Allons plus loin. Traçons les segments issus de chaque point du quadrillage, perpendiculaires à la droite D , dirigés vers le haut, et de longueur L . Ces segments sont appelés *surfaces atomiques*. Chaque point du quadrillage possède ainsi sa surface atomique. D'après ce qui précède, les points du chemin rasant sont exactement les points du quadrillage dont la surface atomique coupe la droite D . Ce que nous avons fait avec la droite D passant par O peut être refait avec n'importe quelle droite D' passant par un point O' du quadrillage, comme sur la *figure 2* avec O' (1, 2). Le pavage est obtenu par intersection de la droite D' avec les surfaces atomiques concernées, et c'est toujours le même pavage de Fibonacci, seulement décalé du pavage initial par translation. En prenant toutes les droites passant par les points du quadrillage,² celles-ci vont couvrir le plan, cela étant dû à leur pente irrationnelle, et l'on aboutit à un pavage du plan suivant deux couleurs, dont une partie est montrée sur la *figure 3*.

¹ Nous ne donnons pas ici le programme permettant d'aboutir à cette figure. Celui-ci consiste essentiellement à tracer le chemin rasant point par point. A partir d'un point obtenu sur le chemin rasant, on cherche son successeur, soit horizontal soit vertical, en faisant un test.

² A vrai dire, nous n'avons pris que des demi-droites, situées à droite du point O' , seul point à coordonnées entières situés sur les droites D' . Mais on pourrait aussi avoir des droites D' ne passant par aucun point à coordonnées entières, ce qui permettrait de tracer le pavage de Fibonacci sur toute la droite.

Par la même occasion, cela donne un nouveau moyen de construire les pavages de Fibonacci, ou plus largement de pavages sur des droites à pente irrationnelle. Pour cela plaçons-nous dans le repère xOy du quadrillage, et prenons une droite D' passant par un point O' (x_0, y_0) du quadrillage et faisant un angle α avec l'axe horizontal, soit une pente $\tan\alpha$, prise entre 0 et 1.³

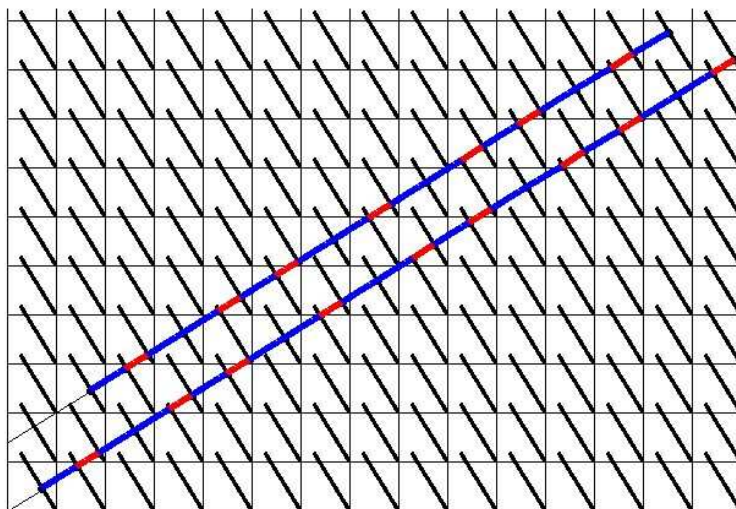


Figure 2 : Tracé des surfaces atomiques associées à chaque point du quadrillage, avec deux pavages de Fibonacci, l'un sur la droite issue de O , l'autre sur la droite passant par O' (1, 2). Ces deux pavages se déduisent par translation de vecteur (1, 2).

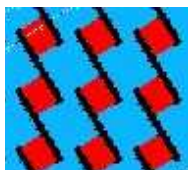


Figure 3 : Les surfaces atomiques sont en noir, et les pavages de Fibonacci répétés sur une infinité de droites donnent ce pavage du plan à base de carrés rouges ou bleus, correspondant à des empilages de pavés rouges ou bleus.

L'équation de la droite est :

$$y - y_0 = \tan \alpha (x - x_0) \text{ ou } y = \tan \alpha x + b \text{ avec } b = -x_0 \tan \alpha + y_0.$$

Prenons maintenant la surface atomique (vecteur \mathbf{AA}') associée à un point $A(x, y)$ du quadrillage. Le point A est un point du chemin rasant sous la droite D' si et seulement si le carré du quadrillage ayant pour sommet A (et situé au-dessus à sa gauche) coupe la droite D' . On en déduit la position extrême du point A et la longueur L de la surface atomique correspondante, comme indiqué sur la figure 4. On constate qu'une surface atomique n'est autre que la projection du carré unité sur une perpendiculaire à la droite D' .

³ Rappelons que dans le cas particulier du pavage de Fibonacci, on avait $\tan \alpha = \varphi' = (\sqrt{5} - 1) / 2$.

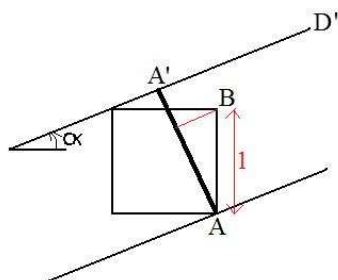


Figure 4 : La surface atomique AA' de longueur L . Un point du quadrillage sera un point du chemin rasant si et seulement si sa distance à la droite D' est inférieure à L .

Par projection du point B sur AA' , on trouve $L = \cos\alpha + \sin\alpha$. On en déduit les coordonnées du vecteur $\overline{AA'}$: $(-L \sin\alpha, L \cos\alpha)$, puis celles du point A' $(x - L \sin\alpha, y + L \cos\alpha)$. Ces résultats permettent de programmer le dessin des surfaces atomiques.

Un point A du quadrillage appartient au chemin rasant sous D' si et seulement si le point A est sous la droite et que sa distance à la droite est inférieure à L . En appelant H la projection de A sur D' et en prenant le vecteur unité $\mathbf{V}(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ perpendiculaire à D' et orienté vers le haut, on doit avoir $\overline{AH} > 0$ et $\overline{AH} < L$, avec $\overline{AH} = (x - x_0) \sin\alpha - (y - y_0) \cos\alpha$.

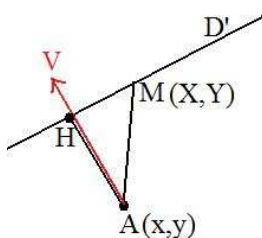


Figure 5 : Pour avoir \overline{AH}

D'où vient la formule donnant \overline{AH} ? Par définition du produit scalaire, on a $\overline{AH} = \overline{AM} \cdot \mathbf{V}$

$= -(X - x) \sin\alpha + (Y - y) \cos\alpha$, avec $A(x, y)$ et $M(X, Y)$, ce point M étant pris sur la droite D' (figure 5), avec X et Y vérifiant $Y - y_0 = \tan\alpha (X - x_0)$, ou encore :

$Y \cos\alpha - X \sin\alpha = y_0 \cos\alpha - x_0 \sin\alpha$. En remplaçant, on a bien $\overline{AH} = (x - x_0) \sin\alpha - (y - y_0) \cos\alpha$.

En prenant les points du quadrillage, il est aisé de trouver parmi eux les points A qui obéissent aux conditions précédentes, ce qui donne le chemin rasant sous la droite D' . Il ne reste plus qu'à projeter ces points du chemin rasant sur la droite D' pour obtenir le pavage correspondant sur la droite D' . Pour avoir la projection d'un point A du chemin rasant sur la droite D' , on prend le point d'intersection de la droite D' d'équation $y = \tan\alpha x + b$ avec la perpendiculaire menée à partir de A , d'équation $y - y_A = (-1/\tan\alpha)(X - x_A)$, ou encore $y = (-1/\tan\alpha)X + b'$ avec $b' = x_A/\tan\alpha + y_A$. Cela donne le point de coordonnées :

$X' = (b' - b) \sin\alpha \cos\alpha$ et $Y' = \tan\alpha X' + b$. D'où le programme :

```

on se donne le point origine (xorig, yorig) sur l'écran et le zoom appelé pas
xmax=18; ymax=(double)xmax*tanalpha; /* limites du quadrillage */
/* quadrillage */
for(x=0;x<=xmax;x++) line(xorig+pas*x,yorig, xorig+pas*x,yorig- pas*(ymax+1.),black);
for(y=0;y<=ymax+1;y++) line(xorig,yorig-pas*y, xorig+pas*xmax,yorig- pas*y,black);
/* dessin des surfaces atomiques */
for(x=1;x<=xmax;x++) for(y=0;y<=ymax;y++)
{ vx= - (cosalpha+sinalpha) *sinalpha; vy =(cosalpha+sinalpha)*cosalpha;
  linewidthwidth(xorig+pas*x,yorig- pas*y,xorig+pas*(x+vx), yorig-pas*(y+vy),1,black);
}
/* droite issue de O' (xoo, yoo) */
on se donne xoo et yoo
b=yoo-tanalpha*xoo;
xm=(ymax-b)/tanalpha; /* tracé de la droite (segment) entre O' et le point (xm, ymax) */
line(xorig,yorig-pas*b,xorig+ xm*pas,yorig - pas*ymax,black);

```

```

k=0;
for(x=xoo+1;x<=xm;x++) for(y=0;y<=ymax;y++)
  { AH=sinalpha*(x-xoo)-cosalpha*(y-yoo);
    if (AH>=0. && AH<cosalpha+sinalpha) { xx[k]=x; yy[k]=y; k++; } /* points rasants */
  }
nbpnts=k;  bb0=xx[0]/tanalpha+yy[0];
XX[0]=(bb0-b)*sinalpha*cosalpha; YY[0]=tanalpha*XX[0]+b; /* premier point après projection */
for(k=1;k<nbpnts;k++)
  { bbk=xx[k]/tanalpha+yy[k];
    XX[k]=(bbk-b)*sinalpha*cosalpha; YY[k]=tanalpha*XX[k]+b; /* points projetés */
    if (xx[k]==xx[k-1]) linewidth(xorig+pas*XX[k-1],yorig-pas*YY[k-1],
                                   xorig+pas*XX[k],yorig-pas*YY[k], 2,red); /* pavé court */
    else linewidth(xorig+pas*XX[k-1],yorig-pas*YY[k-1],
                   xorig+pas*XX[k],yorig-pas*YY[k], 2,blue); /* pavé long */
  }

```

Atlas des configurations

Lorsque la droite a une pente comprise entre 0 et 1 (angle entre 0 et 45°), le chemin rasant ne peut jamais avoir deux traits verticaux successifs. Deux traits successifs sont soit vertical – horizontal, soit horizontal – horizontal, soit horizontal – vertical. Le pavage obtenu par projection possède donc trois configurations autour de chaque point séparant deux pavés :

- * un pavé court suivi d'un pavé long
- * deux pavés longs
- * un pavé long suivi d'un pavé court

Cela dépend de la position du point A par rapport à la droite, donnant lieu à trois cas de figure (figure 6). Selon l'éloignement du point A par rapport à la droite, on a la configuration court-long lorsque A est proche, puis la configuration long-long, et enfin la configuration long-court lorsque A est le plus loin. Cette situation se résume en prenant un carré dont le sommet en bas à droite est le point A, avec trois bandes où se trouvent les droites pour chaque configuration (figure 7).

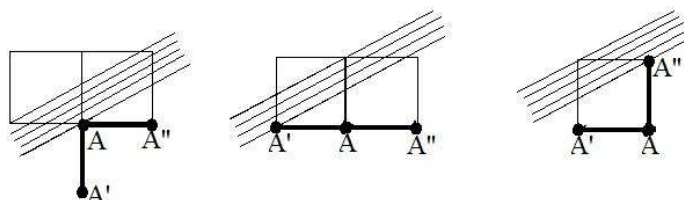


Figure 6 : Partie A'AA'' du chemin rasant autour de A, avec la position des droites qui acceptent ce chemin rasant, dans les trois cas possibles après projection sur la droite : court-long, long-long, long-court.

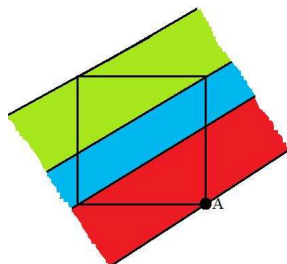


Figure 7 : Disposition possible des droites par rapport à un point A de leur chemin rasant. Pour les droites dans la bande rouge, on a le morceau de pavage court-long autour de la projection de A, dans la bande rouge on a le pavage long-long, et dans la bande verte le pavage long-court.

Cela peut être vu autrement. Prenons une droite D . Les points A du réseau carré qui constituent son chemin rasant par en-dessous sont tous situés dans une bande de longueur L (avec $L = \cos\alpha + \sin\alpha$, en particulier $\varphi \cos\alpha$ dans le cas de la pente φ'). Selon leur distance avec la droite D , les points A donnent lieu à l'une des trois configurations (*figure 8*).

On dispose alors d'un théorème⁴ qui nous dit que les projections des points A du réseau sur le segment de longueur L perpendiculaire à la droite D est dense sur ce segment, et que cette distribution est uniforme.

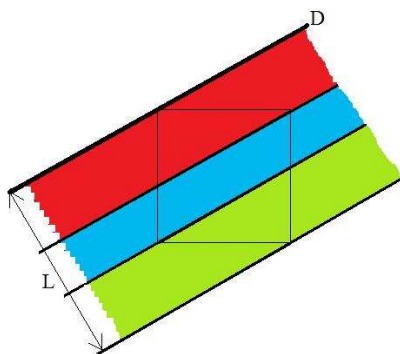


Figure 8 : La droite D et les trois zones pour les points A du réseau carré. Dans la zone rouge, les points A donnent en projection un pavé court suivi d'un pavé long. Dans la zone bleue, on obtient un pavé long suivi d'un pavé long. Dans la zone verte, on a un pavé long suivi d'un pavé court.

Cela a d'importantes conséquences. On vérifie d'abord que la bande rouge et la bande verte (cf. *figure 8*) ont une largeur $\sin\alpha$, et que la bande bleue a pour largeur $\cos\alpha - \sin\alpha$. Grâce à la distribution uniforme des points, on peut affirmer que la proportion des segments courts (provenant de la moitié des bandes rouge et verte) par rapport aux pavés longs (provenant de la moitié des bandes rouge et verte et de la bande bleue) est $\sin\alpha / (\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha) = \tan\alpha$, et l'on retrouve en particulier la proportion φ' pour le pavage de Fibonacci. On peut aller plus loin. Prenons un bloc de pavés successifs du pavage. Les points A du réseau carré qui leur correspondent sont forcément situés à l'intérieur d'une bande qui les délimitent. A cause de la distribution dense de l'infinité des points A dans cette bande, on est assuré que le même bloc de pavés va se retrouver ailleurs dans le pavage.

Exemple : Où doit-on prendre le point A sur le réseau carré pour avoir le bloc rasant 011010, A étant entre le 0 et le 1 du début ? Commençons par placer cette suite de traits horizontaux et verticaux dans le quadrillage, avec son point A (voir *figure 9*). Puis, en utilisant les trois dessins de la figure 6, avançons pas à pas en plaçant la zone où doit se trouver la droite D pour accepter ce bloc rasant. Cette zone se restreint progressivement et se termine par la bande rouge de la figure 9 à gauche. Il reste à reprendre ce dessin en se donnant la droite D et en dessinant la même zone rouge sous la droite, lieu des points A du quadrillage permettant le motif 011010. Pour chacun de ces points, on retrouve le même bloc rasant, qui se répète une infinité de fois.

⁴ voir par exemple V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, éditions Mir, 1974. Nous ne démontrons pas ce théorème ici.

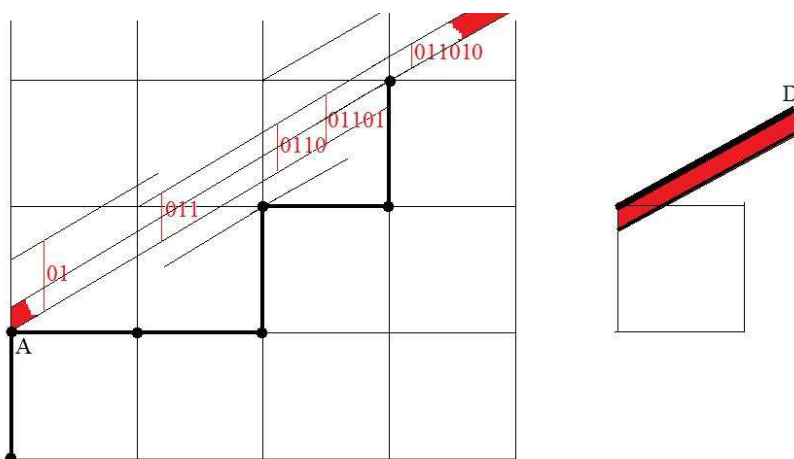


Figure 9 : A gauche, à partir du motif 011010, zones de plus en plus restreintes où doit se trouver la droite D pour avoir ce chemin rasant. A droite, la même zone sous la droite D donnée, lieu des points A permettant l'obtention de ce motif.

Pavage quasi-périodique

Reprenons l'exemple de la droite de pente irrationnelle φ' . On sait qu'il existe des fractions de plus en plus proches de φ' qui sont le quotient de deux nombres successifs de la suite de Fibonacci (définie par $u_0 = 0$ et la récurrence $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$). Par exemple $u_{11}/u_{12} = 89/144$ est un approximant rationnel de φ' . Quelle est la différence entre la droite de pente φ' (à partir de l'origine) et celle de pente $89/144$? A l'échelle de nos dessins où les abscisses des points sont dans un intervalle d'une vingtaine d'unités, on ne verra aucune différence entre les deux pavages sur ces droites. Mais la droite de pente rationnelle $89/144$ passe une infinité de fois par des points à coordonnées entières, non seulement le point O , mais tous les points dont l'abscisse est un multiple de 144. Le pavage sur cette droite se répète donc régulièrement. La proportion du nombre de pavés courts par rapport au nombre de pavés longs qui est obtenue entre les points d'abscisse 0 et 144 se retrouve identique sur tous les blocs successifs de longueur 144. Finalement la proportion des pavés courts par rapport aux pavés longs est une fraction d'entiers sur la droite infinie. Ce pavage est périodique, en ce sens que le même bloc de pavés se répète en succession et indéfiniment sur la droite.

Il n'en est pas de même pour la droite de pente φ' qui ne passe que par le point à coordonnées entières O . Sur la droite infinie, la proportion de pavés courts par rapport aux pavés longs est le nombre irrationnel φ' . Le pavage n'est donc pas périodique.⁵ Mais pourquoi dit-on qu'il est quasi-périodique ? Parce que si l'on prend un bloc de pavés successifs, sur une certaine longueur, on est sûr que ce même bloc va se retrouver en d'autres endroits du pavage, et cela une infinité de fois. On dit qu'il y a isomorphisme local. A défaut de périodicité, on a une quasi-périodicité, d'où le nom de quasi-cristal.

La méthode de coupe et projection

Nous allons généraliser le pavage de Fibonacci, où l'on s'était placé dans un plan (espace à deux dimensions), en projetant des points à coordonnées entières sur une droite (espace de dimension 1), et en ne prenant que les points situés dans une zone correspondant à la projection d'un carré unitaire du réseau perpendiculairement à la droite. Dans le cas général, on se place dans un espace à n dimensions, avec son réseau de points à coordonnées entières, et l'on

⁵ Un pavage périodique impose une proportion rationnelle des deux types de pavés. On en déduit qu'un pavage ayant une proportion irrationnelle n'est pas périodique. Mais il existe aussi des pavages non périodiques qui ont une proportion rationnelle des deux types de pavés (la suite de Morse-Thue en est un exemple).

effectue une projection sur un sous-espace E de dimension inférieure, perpendiculairement à un sous-espace E' supplémentaire du précédent, en ne prenant que les points situés dans la zone correspondant à la projection d'un hyper-cube unité sur ce sous-espace supplémentaire.

Coupe de l'espace en 3D par un plan

Un exemple simple consiste à se placer dans l'espace à trois dimensions, avec son réseau de cubes unités, puis à le couper par un plan (deux dimensions). On ne garde que les cubes qui affleurent, à savoir ceux qui sont traversés par le plan. Cela revient bien à prendre les points à coordonnées entières situés dans une bande parallèle au plan dont la largeur est la projection d'un cube unité sur la perpendiculaire au plan. En prenant un plan faisant des angles irrationnels avec le repère en 3D, les cubes obtenus projetés sur le plan donnent un pavage quasi-périodique à base de trois types de losanges.

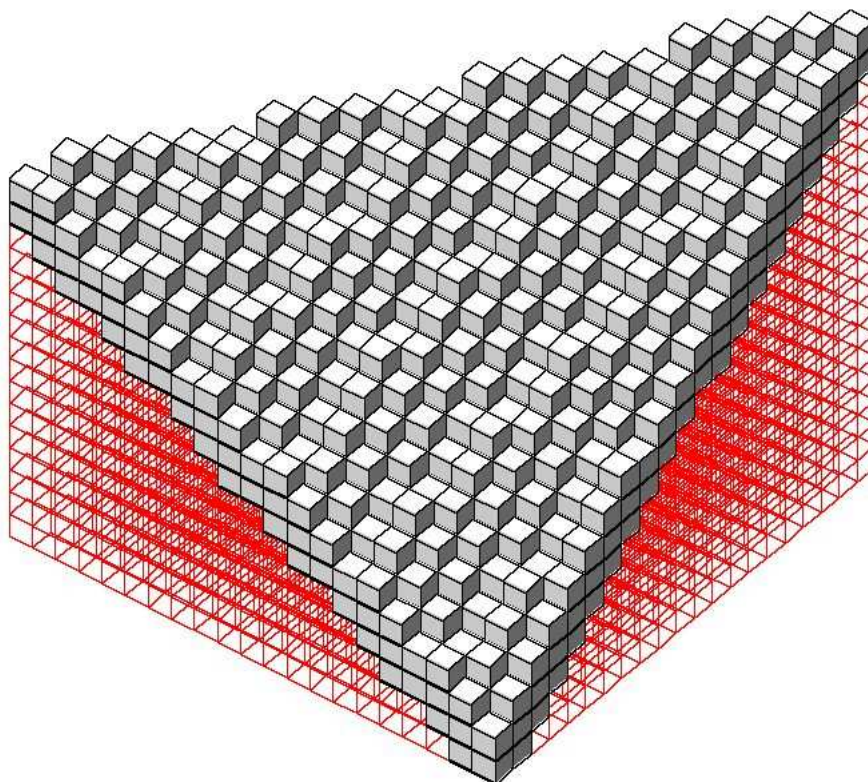


Figure 10 : Les cubes de surface - ceux qui sont traversés par le plan lorsque celui-ci coupe le réseau cubique en trois dimensions.

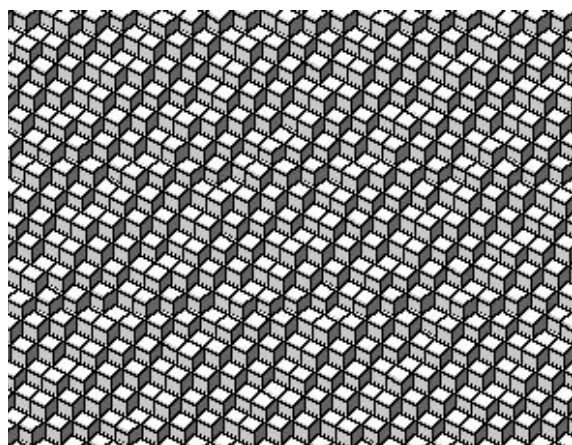


Figure 11 : Mise à plat des cubes de surface, aboutissant à un pavage plan avec trois types de losanges

Pour faire le programme, utilisons la perspective cavalière vue dans le chapitre *géométrie 3D* (voir cours *graphisme et géométrie*). On se place dans un repère $Oxyz$, et l'on commence par dessiner un quadrillage de points dans le plan horizontal xOy . Celui-ci est vu sous un angle α que l'on se donne, et l'on connaît les formules permettant de passer des coordonnées (x, y, z) d'un point de l'espace à celles en 2d de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'oeil, ce qui nous donnera après grossissement les coordonnées (xe, ye) du point correspondant sur l'écran de l'ordinateur. On utilise pour cela les fonctions suivantes :

```
int xe (double x, double y) {return xorig+A* (x-y);}
int ye (double x, double y, double z) {return yorig-B*(x+y)-C*z;}
avec
A=zoom/sqrt(2.); B=zoom*sinalpha/sqrt(2.);C=zoom*cosalpha;
```

Cela permet de visualiser le quadrillage sur le plan de base xOy , où chaque carré a des sommets $1(i, j)$, $2(i+1, j)$, $3(i, j+1)$, $4(i+1, j+1)$ à coordonnées entières (*figure 12*). Le dessin est fait à partir des carrés les plus lointains et de droite à gauche, à partir du point $(N, 0)$ avec N donné correspondant au nombre de carrés sur un axe.

```
for(K=N; K>=0; K--) for(i=0;i<=K;i++)
{ j=K-i;
  xe1=xe(i,j);ye1=ye(i,j,0);   xe2=xe(i+1,j);ye2=ye(i+1,j,0);
  xe3=xe(i,j+1);ye3=ye(i,j+1,0);   xe4=xe(i+1,j+1);ye4=ye(i+1,j+1,0);
  line(xe1,ye1,xe2,ye2,color);line(xe1,ye1,xe3,ye3,black);
  line(xe2,ye2,xe4,ye4,color);line(xe3,ye3,xe4,ye4,black);
}
```

Cela fait, on pratique une rotation du quadrillage autour du O , en le tournant d'un angle β donné. Les points (x, y) du quadrillage deviennent les points (rx, ry) grâce aux formules de passage de ces deux fonctions :

```
double rx(int x,int y) {return (double)x*cosbeta-(double)y*sinbeta;}
double ry(int x,int y){return (double)x*sinbeta+(double)y*cosbeta;}
```

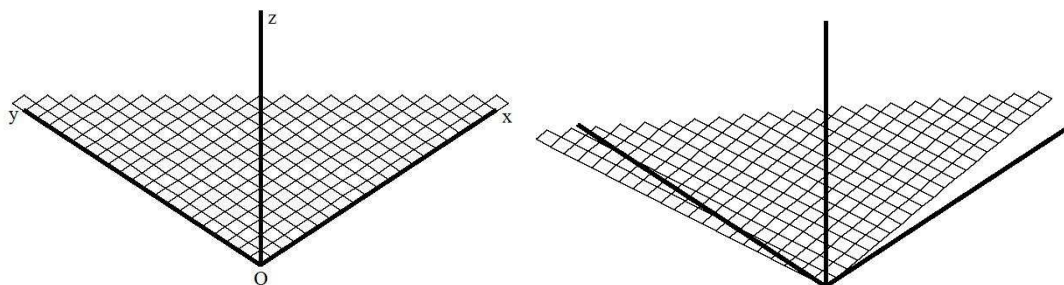


Figure 12 : A gauche, vue du quadrillage et des axes du repère sous l'angle de vue α , et à droite la même vue après rotation du quadrillage d'un angle β

Pourquoi a-t-on fait cela ? Parce que le plan de coupe va justement être le plan perpendiculaire au rayon de l'œil (d'équation $x + y - cz = 0$) et que l'on veut que ce plan fasse des angles irrationnels avec le quadrillage, ce dont on s'approchera en prenant des angles α et β quelconques (si l'on prenait $\beta = 0$, on garderait la symétrie gauche-droite, et l'on aurait seulement une aperiodicité verticale grâce à un angle α quelconque).

Il nous reste à fabriquer la grille de points (i, j, k) en 3d, en accolant des cubes sur notre quadrillage initial. On privilégie ensuite les cubes qui sont traversés par le plan de coupe. Comme l'œil voit le sommet $1(i, j, k+1)$ comme étant le plus haut sommet d'un cube et le

sommet 4 ($i+1, j+1, k$) comme étant le plus bas, les cubes traversés sont ceux dont le sommet 1 est au-dessus du plan et le sommet 8 au-dessous (*figure 13*). Ces cubes vont avoir leurs arêtes coloriées en noir. On dessine aussi les cubes non traversés et situés au-dessous, dont les arêtes sont coloriées en rouge. Enfin on colorie les faces des cubes traversés, avec leurs trois faces visibles : 1234 en blanc, 1562 en gris foncé et 1573 en gris pâle, pour aboutir au dessin de la *figure 10*. Ces cubes remplis sont dessinés des plus lointains au plus proches, ce qui explique à posteriori pourquoi on avait dessiné le quadrillage initial à partir des carrés les plus loin de l'œil. On trouvera le programme complet ci-dessous.

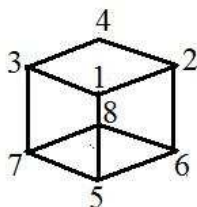


Figure 13 : Un cube et ses sommets numérotés

```
#include <SDL/SDL.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define xorig 400.
#define yorig 580.
#define zoom 20.
#define N 20
#define pi 3.14159
double rx(int x,int y);
double ry(int x,int y);
int xe (double x, double y);
int ye (double x, double y, double z);
intégrer les fonctions graphiques (pause(), putpixel(), line(), ... )
double alpha,cosalpha,sinalpha,A,B,C,c,cosbeta,sinbeta,beta;
SDL_Surface * screen; Uint32 white,red,black,darkgray,lightgray,color;

int main(int argc, char ** argv)
{
int K, xe1,ye1,xe2,ye2,xe3,ye3,xe4,ye4,xe5,ye5,xe6,ye6,xe7,ye7 ; int i,j,k,xg,yg;
double rx1,ry1,rx2,ry2,rx3,ry3,rx4,ry4,q;

SDL_Init(SDL_INIT_VIDEO);
screen=SDL_SetVideoMode(800,600,32, SDL_HWSURFACE|SDL_DOUBLEBUF);
white=SDL_MapRGB(screen->format,255,255,255); black=SDL_MapRGB(screen->format,0,0,0);
red=SDL_MapRGB(screen->format,255,0,0);
darkgray=SDL_MapRGB(screen->format,100,100,100);
lightgray=SDL_MapRGB(screen->format,200,200,200);
SDL_FillRect(screen,0,white);
/** angle alpha de l'oeil avec l'horizontale, et angle beta de rotation autour de Oz */
alpha= 0.71131331331133;cosalpha=cos(alpha); sinalpha=sin(alpha);
beta=0.12111111;cosbeta=cos(beta);sinbeta=sin(beta);
A=zoom/sqrt(2.); B=zoom*sinalpha/sqrt(2.);C=zoom*cosalpha; /* pour les formules de passage */
/** plan de coupe passant par O, d'équation x + y - cz = 0 ***/
c=sqrt(2.)*tan(alpha);
/** cubes ***/
for(K=N;K>=0;K--)
{
for(i=0;i<=K;i++)
{
j=K-i;
for(k=0;k<N+10;k++) /* k est l'altitude de la face basse 5687 d'un cube */
{ rx1=rx(i,j);ry1=ry(i,j);rx2=rx(i+1,j);ry2=ry(i+1,j);
rx3=rx(i,j+1);ry3=ry(i,j+1);rx4=rx(i+1,j+1);ry4=ry(i+1,j+1);
```

```

if (rx1+ry1-c*(k+1)<0. && rx4+ry4-c*k>0.) color=black; /* cubes traversés */
else if (rx1+ry1-c*(k+1.)>0.) color=red; /* cubes au-dessous */
else continue; /* on ne dessine pas les autres cubes, ceux au-dessus */
xe1=xe(rx1,ry1);ye1=ye(rx1,ry1,k+1); xe2=xe(rx2,ry2);ye2=ye(rx2,ry2,k+1);
xe3=xe(rx3,ry3);ye3=ye(rx3,ry3,k+1); xe4=xe(rx4,ry4);ye4=ye(rx4,ry4,k+1);
if(xe1>0 && xe1< 800 && ye1> 0 && ye1< 600)
{ line(xe1,ye1,xe2,ye2,color);line(xe1,ye1,xe3,ye3,color);
  line(xe2,ye2,xe4,ye4,color);line(xe3,ye3,xe4,ye4,color);
  xe5=xe1;ye5=ye(rx1,ry1,k); xe6=xe2;ye6=ye(rx2,ry2,k); xe7=xe3;ye7=ye(rx3,ry3,k);
  line(xe5,ye5,xe1,ye1,color); line(xe5,ye5,xe6,ye6,color); line(xe5,ye5,xe7,ye7,color);
  line(xe6,ye6,xe2,ye2,color); line(xe7,ye7,xe3,ye3,color);
  if (color==black)
  {
    for(q=0;q<=1.;q+=0.01) /* coloriage de la face du haut */
    line(xe1+q*(xe3-xe1), ye1+q*(ye3-ye1), xe2+q*(xe4-xe2), ye2+q*(ye4-ye2),white);
    line(xe1,ye1,xe2,ye2,black);line(xe1,ye1,xe3,ye3,black); /* on remet les arêtes */
    line(xe2,ye2,xe4,ye4,color);line(xe4,ye4,xe3,ye3,black);
    for(q=0;q<=1.;q+=0.01) /* coloriage de la face 1573 */
    line(xe3+q*(xe7-xe3), ye3+q*(ye7-ye3),
        xe1+q*(xe5-xe1), ye1+q*(ye5-ye1),lightgray);
    line(xe5,ye5,xe1,ye1,black);line(xe1,ye1,xe3,ye3,black);
    line(xe3,ye3,xe7,ye7,black);line(xe7,ye7,xe5,ye5,black);
    for(q=0;q<=1.;q+=0.01) /* coloriage de la face 1562 */
    line(xe2+q*(xe6-xe2), ye2+q*(ye6-ye2),
        xe1+q*(xe5-xe1), ye1+q*(ye5-ye1),darkgray);
    line(xe5,ye5,xe6,ye6,black);line(xe6,ye6,xe2,ye2,black);
    line(xe2,ye2,xe1,ye1,black);line(xe1,ye1,xe5,ye5,black);
  }
}
} /* fin de la boucle k */
}
}
SDL_Flip(screen);pause();return 0;
}

```

La méthode de coupe et projection s'applique aussi à des espaces de dimension supérieure, quatre ou cinq notamment (on pourra consulter le document : *Introduction à la quasicristallographie*, de M. Duneau et D. Gratias.).