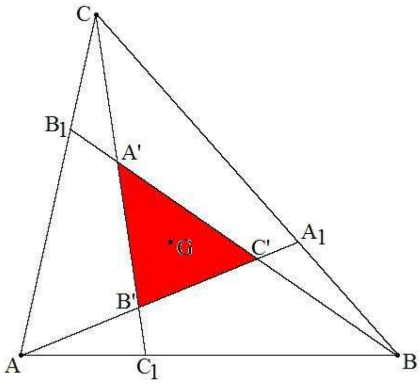
Barycentres et triangles

L'objectif est de construire un triangle $A'B'C'$ à partir d'un triangle ABC, suivant le procédé qui fait l'objet de l'exercice suivant.



Considérons un triangle ABC de sens direct, avec les points A_1, B_1, C_1 situés respectivement au tiers des côtés [BC], [CA], [AB] à partir des points B, C et A. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent en un point C', les droites (BB_1) et (CC_1) se coupent en A', (CC_1) et (AA_1) se coupent en B'. C'est ainsi que l'on obtient le triangle A'B'C' à partir de ABC.

1) Prenons le point C', point d'intersection de (AA_1) et (BB_1).

a) Montrer que le barycentre P de (B, 2), (C, 1) et (A , k) avec k réel positif ou nul, décrit le segment [AA_1] situé à l'intérieur du triangle ABC.

Prenons le barycentre de (B, 2), (C, 1). Il s'agit du point situé au tiers de [BC_1] à partir de B, soit le point A_1. En vertu de la règle du barycentre partiel, le barycentre P est aussi le barycentre de (A_1, 3) et (A, k). Il est tel que $\mathbf{OP} = (3\ \mathbf{OA}_1 + k\ \mathbf{OA}) / (k + 3)$, O étant un point « origine » quelconque, et en prenant O en A, cela fait $\mathbf{AP} = (3 / (k + 3))\ \mathbf{AA}_1$. Lors que k décrit $\boldsymbol{R}$+, 3 / (k + 3) décrit [0 1], ce qui signifie que P décrit le segment [AA_1], en acceptant le point A pour k infini. Comme les coefficients des points A, B, C sont de signe positif, le point P est à l'intérieur du triangle ABC et le segment [AA_1) aussi.

b) Pour les mêmes raisons que précédemment, le segment [BB_1] est à l'intérieur du triangle ABC, et son point d'intersection C' avec [AA_1] est un des points P précédents. Quelle valeur convient-il de donner au nombre k pour que C' soit le barycentre de (B, 2), (C, 1) et (A , k) ? En déduire la position de C' sur [AA_1) et [BB_1].

Comme B_1 est au tiers de [AC] à partir de C, c'est aussi le barycentre de (A, 1), (C, 2), ou encore de (A, 1/2), (C, 1) pour retrouver le coefficient qu'avait C dans la question précédente. Considérons alors le barycentre Q de (A, 1/2), (B, 2), (C,1). On sait déjà que ce point est sur [AA_1], avec k = 1/2.

D'autre part, le barycentre de (A, 1/2), (C, 1) est le point B_1. Le barycentre Q de (A, 1/2), (B, 2), (C,1) est aussi le barycentre de (B_1, 3/2) et (B, 2). Il est situé sur [BB_1], et il vérifie

$\mathbf{OQ} = (3/2)\ \mathbf{OB_1} + 2\ \mathbf{OB}) / (7/2)$.
Avec O en B, $\mathbf{BQ} = (3/2)\ \mathbf{BB_1} / (7/2) = (3/7)\ \mathbf{BB}_1$.

Finalement ce barycentre est à la fois sur [AA_1] et [BB_1]. Il s'agit donc du point C', qui est le barycentre de (A, 1/2), (B, 2), (C,1) ou si l'on préfère de (A, 1), (B, 4), (C, 2).

En faisant k = 1/2 dans la formule du *a)* on trouve $\mathbf{AC'} = (6/7)\ \mathbf{AA_1}$, et l'on a vu aussi que $\mathbf{BC'} = (3/7)\ \mathbf{BB_1}$. Le point C' est aux 6/7 de [AA_1] à partir de A, et au 3/7 de [BB_1] à partir de B.

2) Faire de même avec A' et B'. En déduire que A' est le milieu de [CB'], B' le milieu de [AC'] et C' milieu de [BA']. Sachant qu'il existe un triangle unique A'B'C' à partir de ABC, montrer qu'il existe aussi un triangle unique ABC obtenu à partir de A'B'C', les deux triangles étant dans le sens direct.

On a vu que **AC'** = (6/7) $\mathbf{AA_1}$ et **BC'** = (3/7) $\mathbf{BB_1}$ avec *C'* barycentre de (*A*, 1), (*B*, 4), (*C*, 2).

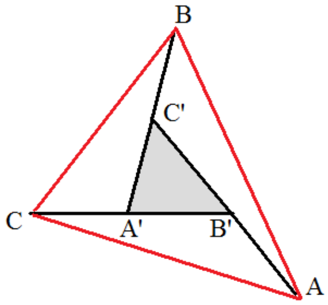
Par décalage cyclique des points, on a de même :

BA' = (6/7) $\mathbf{BB_1}$ et **CA'** = (3/7) $\mathbf{CC_1}$ avec *C'* barycentre de (*B*, 1), (*C*, 4), (*A*, 2)
CB' = (6/7) $\mathbf{CC_1}$ et **AB'** = (3/7) $\mathbf{AA_1}$ avec *C'* barycentre de (*C*, 1), (*A*, 4), (*B*, 2)

Plaçons-nous sur (BB_1). On sait que **BC'** = (3/7) $\mathbf{BB_1}$
et d'autre part **C'A'** = **C'B** + **BA'** = – (3/7) $\mathbf{BB_1}$ + (6/7) $\mathbf{BB_1}$ = (3/7) $\mathbf{BB_1}$ d'où **BC'** = **C'A'**.

C' est le milieu de [*BA'*], et de même *A'* est le milieu de [*CB'*], *B'* le milieu de [*AC'*].

A partir du triangle *ABC* direct, on a construit le triangle *A'B'C'* de sens direct aussi, car *C'* et *A'* se succèdent sur [BB_1], et que *A'* et *B'* se succèdent sur [CC_1]. Inversement, à partir d'un triangle *A'B'C'*, on obtient aussi un seul triangle *ABC* en utilisant le fait que *A'*, *B'* et *C'* sont des milieux, comme l'indique la construction suivante :



3) Montrer que l'isobarycentre G de ABC est aussi l'isobarycentre de A'B'C'.

G est, si l'on veut, le barycentre de (*A*, 7), (*B*, 7), (*C*, 7) ou encore, en découpant chaque point en trois, de (*A*, 1), (*A*, 2), (*A*, 4), (*B*, 1), (*B*, 2), (*B*, 4), (*C*, 1), (*C*, 2), (*C*, 4). Regroupons ces points par groupes de 3, le barycentre de (*A*, 1), (*B*, 4), (*C*, 2) est *C'*, celui de (*A*, 2), (*B*, 1), (*C*, 4) est *A'*, et celui de (*A*, 4), (*B*, 2), (*C*, 1) est *B'*. Grâce à la règle du barycentre partiel, *G* est aussi le barycentre de (*C'*, 7), (*A'*, 7), (*B'*, 7), c'est-à-dire l'isobarycentre de *A'B'C'*.

4) En termes d'angles, il existe quatre cas de figure pour le triangle ABC : il a ses trois angles aigus, ou il a un angle obtus en A, ou il a un angle obtus en B, ou enfin un angle obtus en C. Dans chacun de ces cas, que peut-on dire des angles de A'B'C' ? Pour cela se placer dans un repère orthonormé direct, d'origine A avec B d'abscisse 1 sur (Ox), soit A(0, 0), B(1, 0), et C (xc, yc) avec yc positif, puis utiliser des produits scalaires pour savoir si les angles en A', B', C' sont aigus ou obtus selon la position du point C.

Un calcul simple permet de trouver les coordonnées des vecteurs
$\mathbf{AA_1}$ (xc / 3 + 2/3, yc / 3)
$\mathbf{BB_1}$ (2 xc / 3 – 1, 2 yc / 3)
$\mathbf{CC_1}$ (– xc + 1/3, –yc)

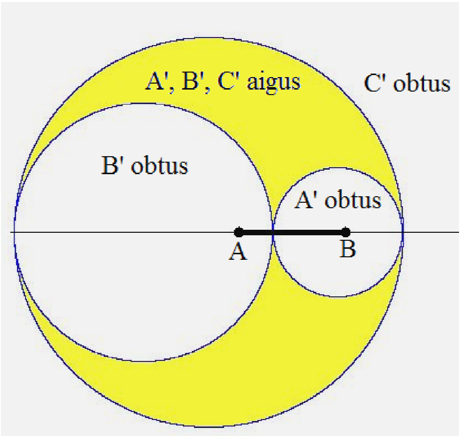
Pour connaître l'angle en *A'*, formons le produit scalaire :
$\mathbf{CC_1}\ \mathbf{B_1B}$ = (– xc + 1/3) (–2 xc /3 + 1) + 2 yc^2 / 3 = (2/3) (xc^2 + yc^2 – 11 xc / 6 + 1/2)

Le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 11\,x / 6 + 1/2 = 0$ a pour centre le point I_1 (11/12, 0) et pour rayon $R_1 = 7/12$. Le produit scalaire sera positif, et l'angle *A'* aigu, si et seulement si le point C est à l'extérieur de ce cercle.

Pour l'angle en *B'*, formons le produit scalaire :
$\mathbf{AA_1}\ \mathbf{C_1C} = (xc / 3 + 2/3)\,(xc - 1/3) + yc^2 /3 = (1/3)\,(xc^2 + yc^2 + 5\,xc / 3 - 2/3)$
Le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 5\,x / 3 - 2/3 = 0$ a pour centre le point I_2 (–5/6, 0) et pour rayon $R_2 = 7/6$. Le produit scalaire sera positif, et l'angle *B'* aigu, si et seulement si le point C est à l'extérieur de ce cercle.

Pour l'angle en *C'*, formons le produit scalaire :
$\mathbf{BB_1}\ \mathbf{A_1A} = (2\,xc /3 - 1)(-xc / 3 - 2/3) - 2\,yc^2 / 9 = (-2/9)\,(xc^2 + yc^2 + xc / 2 - 3)$
Le cercle d'équation $x^2 + y^2 + x / 2 - 3 = 0$ a pour centre I_3 (–1/4, 0) et pour rayon $R_3 = 7/4$. Le produit scalaire sera positif, et l'angle *C'* aigu, si et seulement si le point *C* est à l'intérieur de ce cercle.

Les trois cercles obtenus sont dessinés sur la figure suivante. Notamment le triangle *A'B'C'* a ses trois angles aigus lorsque le point *C* est situé dans la zone coloriée en jaune et située au-dessus de l'axe des *x*. Lorsque le point *C* est dans l'une des zones en gris, le triangle *A'B'C'* a l'un de ses angles obtus.



5) Programmer le dessin du triangle ABC et du triangle A'B'C'.

Il suffit d'utiliser les coordonnées des points :
A(0, 0), *B*(1, 0), *C*(*xc*, *yc*), A_1(xc / 3, yc / 3), B_1(2 xc / 3, 2 yc / 3), C_1(1/3, 0), ce qui donne le programmme suivant :

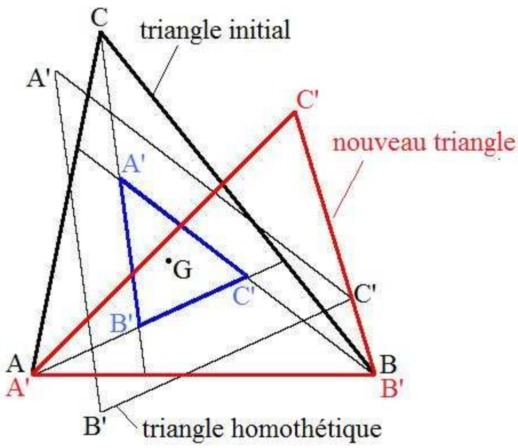
```
xc=0.2;yc=1.;xa=0.;ya=0.;xb=1.;yb=0.;
line(xorig,yorig,xorig+zoom,yorig,black);                    /* dessin du triangle ABC */
line(xorig,yorig,xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,black);
line(xorig+zoom,yorig,xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,black);
xc1=1./3.;yc1=0;  line(xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,xorig+zoom*xc1,yorig-zoom*yc1,black);
xb1=2.*xc/3.;yb1=2.*yc/3.;  line(xorig+zoom,yorig,xorig+zoom*xb1,yorig-zoom*yb1,black);
xa1=xc/3.+2./3.;ya1=yc/3.;  line(xorig,yorig,xorig+zoom*xa1,yorig-zoom*ya1,black);
xg=(1.+xc)/3.;yg=yc/3.;  /* centre de gravité G de ABC ainsi que de A'B'C' */
floodfill(xorig+zoom*xg,yorig-zoom*yg,red,black); /* remplissage du triangle A'B'C' */
filldisc(xorig+zoom*xg,yorig-zoom*yg,2,black);
```

6) On va maintenant procéder à une itération du processus transformant le triangle ABC en A'B'C'.[1] *A chaque étape on procède à un grossissement puis à une isométrie de ce triangle afin de*

[1] Si l'on répétait le processus à partir du triangle *A'B'C'* tel quel, il y aurait contraction des distances, et le processus convergerrait vers le triangle réduit au point *G*.

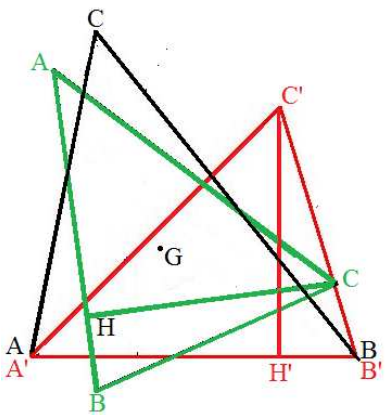
lui donner chaque fois la même base [AB] de longueur 1, et l'on s'intéresse au mouvement du 3ème sommet C du triangle, au fil des itérations.

A partir d'un triangle ABC, on construit le triangle A'B'C'. Puis on pratique une homothétie sur ce triangle A'B'C', par exemple de centre G, de façon à avoir A'B' = 1, tout comme AB. Puis en plaquant [A'B'] sur [AB], tout en respectant les dimensions du triangle, on obtient un nouveau triangle A'B'C' (voir le triangle rouge dans la figure ci-dessous). On est ainsi passé du point C au point C', le reste étant inchangé. Cela étant fait, on recommence à partir de ce nouveau triangle, A'B'C' redevenant ABC, et cela de façon répétée. Que constate-t-on expérimentalement (sur ordinateur) ?



Triangle *ABC* initial en noir, triangle *A'B'C'* en bleu, son homothétique en noir, aussi appelé *A'B'C'*, et enfin le triangle isométrique en rouge, avec [*A'B'*] plaqué sur [*AB*]

A partir du triangle *ABC* initial donné, on détermine le triangle *A'B'C'* avec *A'* de coordonnées *xaa* = (2 *xa* + *xb* + 4 *xc*)/7 et *yaa* = (2 *ya* + *yb* +4 *yc*)/7, et de même pour *B'* et *C'* qui sont aussi des barycentres de *A*, *B*, *C* comme on l'a vu. Puis on calcule *A'B'*, et l'on pratique l'homothétie de centre *G* et de rapport 1 / *A'B'*, de façon que le triangle homothétique, à son tour appelé *ABC* sur la figure ci-dessous (triangle vert), ait sa base [*AB*] de longueur 1. Dans ce triangle, le point *C* se projette sur (*AB*) en *H*, et l'on calcule *X* = *AH* et *Y* = *CH* en utilisant le produit scalaire **AB AC**. Pourquoi ce calcul ? Parce que le triangle isométrique *A'B'C'* final avec *A'* en *A* et *B'* en *B* a son 3ème point *C'* de coordonnées *X* et *Y* (triangle en rouge sur le dessin). Cela étant fait, le triangle *A'B'C'* est appelé *ABC*, et l'on recommence à partir de lui, et cela quelques dizaines de fois. On en déduit le programme :

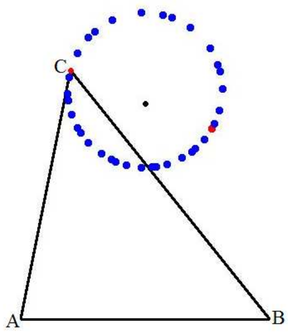


Le triangle homothétique *ABC* tracé en vert, avec le point *H* pied de la hauteur issue de *C*, puis le triangle isométrique *ABC* en rouge où *C* a comme coordonnées *AH* et *CH*.

```
/* triangle initial ABC */
xc=0.2;yc=1.;xa=0.;ya=0.;xb=1.;yb=0.;
linewithwidth(xorig,yorig,xorig+zoom,yorig,1,black);
linewithwidth(xorig,yorig,xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,1,black);
linewithwidth(xorig+zoom,yorig,xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,1,black);
filldisc(xorig+zoom*0.5,yorig-zoom*sqrt(3.)/2.,3,black);
filldisc(xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,3,red);
/* boucle donnant les triangles successifs avec le point C qui bouge */
```

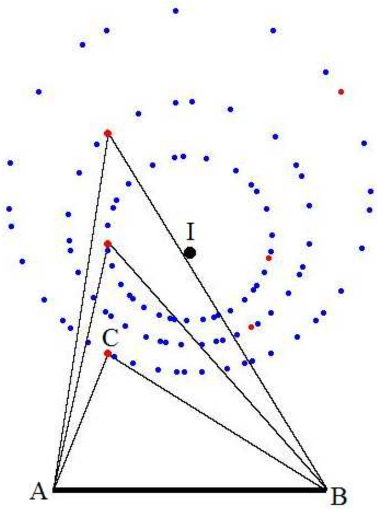
```
for(i=1;i<=34;i++)
  { /* triangle A'B'C' */
    xcc=(xa+4.*xb+2.*xc)/7.;ycc=(ya+4.*yb+2.*yc)/7.;
    xaa=(2.*xa+xb+4.*xc)/7.;yaa=(2.*ya+yb+4.*yc)/7.;
    xbb=(4.*xa+2.*xb+xc)/7.;ybb=(4.*ya+2.*yb+yc)/7.;
    aabb=sqrt( (2.*xa+xb-3.*xc)*(2.*xa+xb-3.*xc)+(2.*ya+yb-3.*yc)*(2.*ya+yb-3.*yc))/7.;
    /* triangle homothétique */
    newxa=(xaa-xg)/aabb+xg; newya=(yaa-yg)/aabb+yg;
    newxb=(xbb-xg)/aabb+xg; newyb=(ybb-yg)/aabb+yg;
    newxc=(xcc-xg)/aabb+xg; newyc=(ycc-yg)/aabb+yg;
    /* actualisation: le triangle homothétique devient ABC */
    xa=newxa;ya=newya; xb=newxb;yb=newyb; xc=newxc;yc=newyc;
    /* calcul de X = AH et Y = CH dans le triangle homothétique */
    ABAC=(xb-xa)*(xc-xa)+(yb-ya)*(yc-ya);  /* produit scalaire */
    AB=sqrt((xb-xa)*(xb-xa)+(yb-ya)*(yb-ya));
    AC=sqrt((xc-xa)*(xc-xa)+(yc-ya)*(yc-ya));
    cosA=ABAC/(AB*AC);
    X=AC*cosA;
    A=acos(cosA); /* angle A dans le triangle homothétique */
    sinA=sin(A);
    Y=AC*sinA;
    if (i==1) filldisc(xorig+zoom*X,yorig-zoom*Y,3,red);
    else  filldisc(xorig+zoom*X,yorig-zoom*Y,2,blue);
    /* actualisation : nouveau triangle de base AB = 1, X et Y étant les coordonnées du nouveau point C */
    xa=0;ya=0; xb=1; yb=0. ;xc=X;yc=Y;
  }
```

Voici ce que l'on obtient au bout d'une trentaine d'itérations. On constate que les points *C*, en bleu sur le dessin ci-dessous, parcourent de façon erratique un cercle passant par le point *C* initial. Notamment le triangle initial *ABC* a des successeurs qui sont quasiment confondus avec lui.



Plus surprenant encore : lorsque l'on prend plusieurs triangles initiaux *ABC*, on observe que les trajectoires circulaires appartiennent toutes aux cercles d'un faisceau de cercles défini par le cercle point *I*, sommet du triangle équilatéral *ABI*,[2] et ayant comme axe radical (*AB*) (cf. figure ci-dessous). Ainsi, à partir d'un point initial *C* d'un triangle *ABC* quel qu'il soit, il existe un cercle unique de ce faisceau de cercles passant par ce point *C*, et la trajectoire du point *C* s'effectue sur ce cercle. Mais démontrer cela est une autre histoire !

[2] Lorsque le triangle initial *ABC* est équilatéral, le triangle *A'B'C'* est aussi équilatéral. Les successeurs du point *C* restent donc confondus avec *C*, et la trajectoire se réduit à un point.


I
C
A
B