Formule de Burnside et cube

Plaçons-nous dans ce contexte : on a un ensemble d'éléments E, et un groupe G de permutations g agissant sur cet ensemble, faisant passer d'un élément de E à un élément de E. La classe d'équivalence d'un élément x de E est formée des éléments $g(x)$ obtenus lorsque g décrit G. Alors la formule de Burnside donne le nombre de ces classes d'équivalence, soit

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|S_g|$$

où S_g associé à la permutation g est l'ensemble des éléments x de E stables par g, soit $g(x) = x$.

Appliquons cela au cube, avec comme groupe G l'ensemble des isométries directes qui laissent le cube invariant. Il s'agit des rotations dont les axes et les angles sont les suivants :

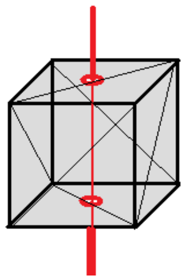
- 3 axes de rotations passant par le centre de deux faces opposées, avec des angles de $\pi/2$, π et $3\pi/2$.
- 6 axes de rotation passant par le milieu de deux arêtes opposées, d'angle π.
- 4 axes de rotation passant par deux sommets opposés, d'angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

En ajoutant l'dentité I, cela donne 1 + 9 + 6 + 8 = 24 isométries directes, soit $|G| = 24$.

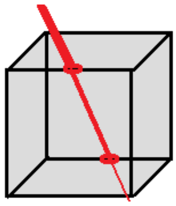
Prenons maintenant les configurations du cube obtenues lorsque l'on trace une diagonale sur chacune des 6 faces carrées. Comme il existe deux façons de placer une diagonale, les configurations sont au nombre de $2^6 = 64$. Elles forment l'ensemble E.

Nous allons maintenant appliquer la formule de Burnside, qui nous donnera le nombre de configurations aux rotations près du cube.

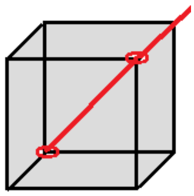
- L'identité laisse toutes les configurations stables, soit 64 cas.



- Prenons une rotation passant par le centre de deux faces. Avec un angle de $\pi/2$ ou $3\pi/2$, aucune configuration ne reste stable, car les faces haute et basse voient leur diagonales changer de sens. Par contre, pour un demi-tour, les faces haute et basse restent identiques, ce qui donne 4 cas de figure, et les faces latérales prises deux à deux doivent avoir des diagonales qui se déduisent l'une de l'autre par la rotation, ce qui donne 4 cas. Le nombre de configurations stables est 16.



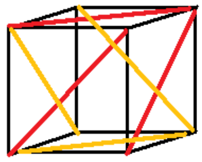
- Prenons une rotation passant par le milieu de deux arêtes. Lors du demi-tour, les deux faces ayant en commun l'arête où se trouve un milieu se transforment l'une en l'autre, ce qui permet 2 cas de figure associés à un milieu et 2 pour l'autre milieu, soit 4 cas. Les deux autres faces se correspondent, ce qui fait encore 2 cas de figure. Finalement, 8 configuratons restent stables.



- Prenons une rotation passant par deux sommets opposés. Avec un angle de $2\pi/3$, chacune des trois faces associées à un sommet passe de l'une à la suivante, ce qui donne 2 cas possibles. et de même pour les trois faces associées à l'autre sommet, 2 cas aussi, soit au total quatre cas. Il en est de même pour l'angle de rotation $4\pi/3$, avec quatre configurations stables.

On obtient ainsi $\sum_{g \in G} |S_g| = 64 + 3\times16 + 6\times48 + 4\times8 = 192$. La formule de Burnside donne : 192 / 24 = 8 configurations différentes aux rotations près.

Il reste à déterminer ces huit configurations. Cela se fait par programme. Chaque diagonale est notée 0 ou 1 selon son sens.



La configuration 000000 correspond au dessin ci-contre, chaque chiffre 0 étant associé à une face, les quatre premiers chiffres correspondant aux faces latérales, et les deux derniers aux faces basse et haute.

On trouve finalement ces 8 configurations, chacune définissant une classe d'équivalence :

000000
000001
000100
000101
000110
001100
001111
010101

Exercice complémentaire

On dispose de deux couleurs, et chaque face du cube est coloriée avec l'une de ces deux couleurs. Quel est le nombre de configurations différentes aux rotations près ?

Il existe seulement un cas différent par rapport à ce qui précède, avec les rotations de $\pi/2$ et $3\pi/2$. Lors d'une de ces rotations qui laisse le cube invariant, les faces latérales doivent avoir la même couleur, ce qui fait deux cas, la face haute a aussi deux couleurs possibles, tout comme la face basse. Soit 8 cas pour chacune des 6 rotations, et au total 48 nouveaux cas. Dans le cas du cube à diagonales, il n'y avait aucun cas.

La formule de Burnside donne alors (192 + 48)/24 = 10 configurations différentes aux rotations près.