Carrés dans un triangle, et dans un quadrilatère

Notre objectif est de voir si l'on peut inscrire un carré dans des figures simples comme un triangle ou un quadrilatère. Nous verrons aussi le cas de carrés circonscrits à un quadrilatère.

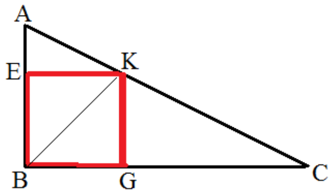
Commençons par un triangle. Nous voulons construire un carré dont les quatre sommets se trouvent sur les côtés du triangle. [1]

Nous allons voir que l'on peut insérer trois carrés dans un triangle lorsque tous ses angles sont strictement aigus. Cela sous-entend qu'un carré va avoir deux sommets sur un côté et un sommet sur chacun des deux autres. A partir du moment où l'on aura un carré, avec deux de ses sommets sur un côté du triangle, on sera alors sûr d'en trouver deux autres, en faisant la même construction avec les deux autres côtés.

Mais commençons par un cas particulier, celui d'un triangle *ABC* rectangle en *B*, où seuls deux carrés peuvent être insérés.

1. Carrés dans un triangle rectangle

Premier cas : Un seul sommet du carré se trouve sur l'hypoténuse [*AC*] du triangle. Il s'ensuit, à cause de l'angle droit, qu'un autre sommet du carré est nécessairement le sommet *B* du triangle. On obtient ainsi un carré *EBGK* avec *K* sur [*AC*], *E* sur [*AB*], *G* sur [*BC*] et *B* commun aux deux côtés de l'angle droit. Le point unique *K* se trouve à l'intersection de l'hypoténuse [*AC*] et de la bissectrice de l'angle droit *B*, celle-ci faisant un angle de 45° avec chaque côté de l'angle droit.



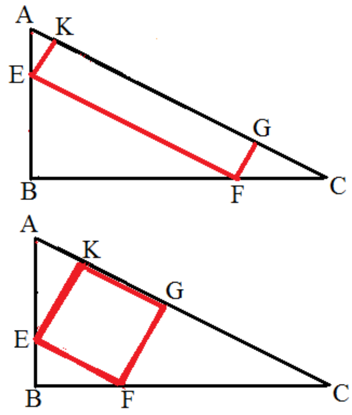
Cherchons la position du point *E*. Le triangle rectangle *ABC* étant caractérisé par ses deux côtés de l'angle droit, posons $AB = 1$, et $BC = a$ (avec $\tan C = 1 / a$). Prenons comme inconnue le côté *L* du carré.

Les triangles *AEK* et *KGC* sont semblables : $AE / EK = KG / GC$, soit $AE = L^2 / GC$ ou encore $1 - L = L^2 (a - L)$, soit $L = a / (1 + a)$. Passons à *AE* : $AE / EB = EK / BC$ (théorème de Thalès élargi, ou trigonométrie), soit $AE = L / a$, $\boldsymbol{AE = 1 / (1 + a)}$.

En introduisant l'angle *C*, on a aussi : $AE = 1 / (1 + 1 / \tan C) = \tan C / (1+ \tan C)$,
$\boldsymbol{AE = \sin C / (\sin C + \cos C)}$.

Deuxième cas : Le carré a deux sommets sur l'hypoténuse [*AC*]. Pour montrer qu'il en existe un et qu'il est unique, prenons un point *E* quelconque sur [*AB*], avec $x = AE$, et construisons le rectangle unique *EFGK* avec *K* et *G* sur [*AC*] et *F* sur [*BC*].

[1] Ce problème est posé dans un cadre bien plus vaste par E. Ghiss, *un carré dans une courbe* (Images des Mathématiques, CNRS, 2012). Précisons que le cas de carrés inscrits dans un quadrilatère est traité par C. M. Hebbert, *the inscribed and circumscribed squares of a quadrilateral and their significance in kinematic geometry*, Annals. of Math. 16, 1915.



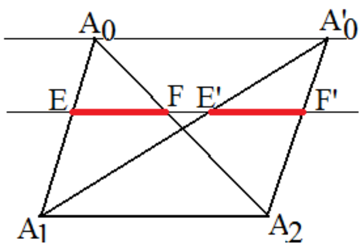
Les triangles AKE et EBF sont semblables, l'angle E du premier est égal à l'angle F du second, et ils sont tous deux égaux à l'angle C du triangle ABC. On en déduit que dans AEK : $\cos C = EK / AE$, d'où $EK = x \cos C$, et dans EBF, $\sin C = EB / EF$, $EF = EB / \sin C = (1 - x) / \sin C$. Le rectangle est un carré si et seulement si $EK = EF$, soit $x \cos C = (1 - x) / \sin C$. On trouve une valeur unique de $x = AE$, soit $\boldsymbol{AE = 1 / (1 + \sin C \cos C)}$.

Finalement on trouve deux carrés inscrits dans le triangle. Le côté L du premier vaut $\sin C \cos C / (\sin C + \cos C)$, et celui du second $\cos C / (1 + \sin C \cos C) = \sin C \cos C / (\sin C + \sin^2 C \cos C)$. En comparant les dénominateurs, on en déduit que le premier carré est strictement plus petit que le second.

2. Carrés dans un triangle à angles aigus

Commençons par une remarque préliminaire. Prenons un triangle quelconque $A_0A_1A_2$, et coupons-le par une parallèle à sa base $[A_1A_2]$, ce qui donne le segment $[EF]$ (*figure 1*). Puis déplaçons le sommet A_0 parallèlement à $[A_1A_2]$, de façon à obtenir un nouveau triangle $A'_0A_1A_2$, ce qui donne un nouveau segment $E'F'$. On constate que $EF = E'F'$. En effet, grâce au théorème de Thalès élargi, on a : $A_0E / A_0A_1 = EF / A_1A_2$ dans le premier triangle et $A'_0E' / A'_0A_1 = E'F' / A_1A_2$ dans le deuxième. Toujours grâce à Thalès, on a aussi $A_0E / A_0A_1 = A'_0E' / A'_0A_1$, d'où $EF = E'F'$.

Supposons maintenant que l'on ait réussi à insérer un carré dans le triangle $A_0A_1A_2$, avec deux des sommets du carré sur la base $[A_1A_2]$, alors en déplaçant le sommet A_0 sur un parallèle à la base, le nouveau triangle $A'_0A_1A_2$, a aussi un carré inséré, celui-ci ayant les mêmes dimensions que le premier (*figure 1 à droite*), grâce à la propriété précédente. Mais si l'on veut que ses deux sommets soient situés sur la base $[A_1A_2]$, il est nécessaire que l'angle en A_2 soit aigu.



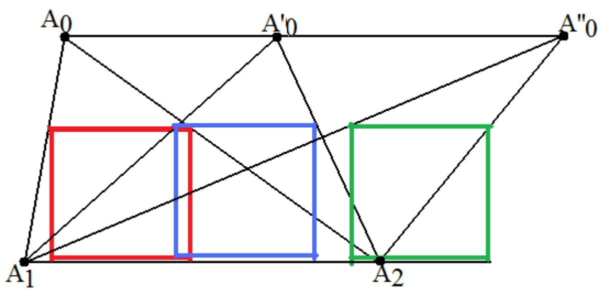


Figure 1 : A gauche, conservation de la longueur EF lorsque le sommet A_0 du triangle se déplace, à droite, des carrés identiques insérés dans trois triangles

Prenons un triangle quelconque $A_0A_1A_2$ avec ses trois angles aigus. En déplaçant A_0 parallèlement à $[A_1A_2]$, on peut faire en sorte d'obtenir un triangle $A'_0A_1A_2$, rectangle en A_1 (*figure 2*).Justement nous savons déjà inscrire un carré dans un triangle rectangle, avec deux sommets sur la base $[A_1A_2]$, et un sommet K situé sur $[A'_0A_2]$, à l'intersection avec la droite (A_1K) bissectrice de l'angle droit (*voir paragraphe 1 premier cas*). En menant la parallèle à $[A_1A_2]$ passant par K, celle-ci coupe les deux côtés du triangle initial $A_0A_1A_2$ en deux points E et F qui sont deux sommets du carré inscrit dans le triangle, les deux autres étant sur la base $[A_1A_2]$.

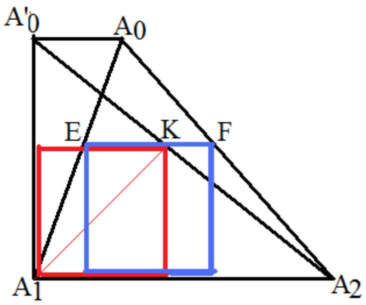
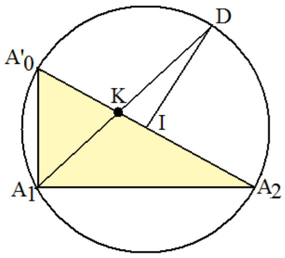


Figure 2 : Construction du carré dans le triangle $A_0A_1A_2$ à partir de celui construit dans le triangle rectangle $A'_0A_1A_2$.



Pour construire le point K, on peut utiliser les formules du 1. (*premier cas*), ou bien faire une construction géométrique utilisant le fait que (A_1K) est bissectrice de l'angle droit. Le milieu I de $[A'_0A_2]$ est le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle. La perpendiculaire à $[A'_0A_2]$, menée par I coupe le cercle en D, ce qui découpe le demi-cercle en deux arcs égaux. La droite (A_1J) est donc la bissectrice de l'angle droit (théorème de l'angle inscrit), ce qui donne le point K.

On en déduit la construction du carré inscrit dans le triangle $A_0A_1A_2$, avec deux de ses sommets sur $[A_1A_2]$ (*figure 3*). Puis on refait la même construction avec les deux autres côtés du triangle, ce qui donne trois carrés.[2]

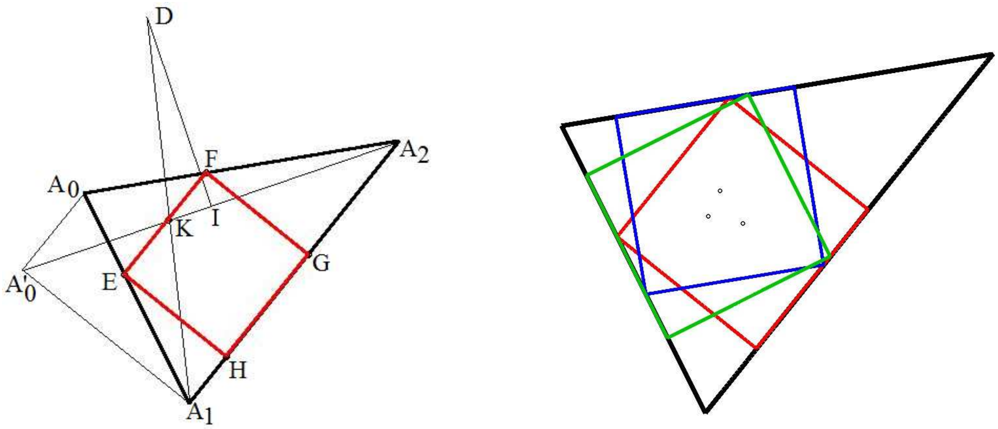


Figure 3 : A gauche, construction du carré $EFGH$ inscrit dans le triangle $A_0A_1A_2$ avec G et H sur $[A_1A_2]$, à droite la même construction répétée, ce qui donne les trois carrés inscrits dans $A_0A_1A_2$

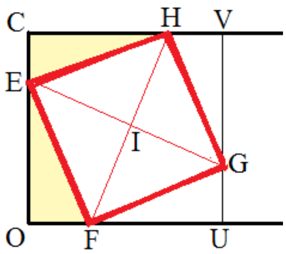
Le cas du triangle étant réglé, passons à d'autres formes simples dans lesquelles insérer un carré.

3. Carré dans un trapèze rectangle

Commençons par inscrire un carré dans une forme en U, soit ⊏. Il s'agit d'un segment $[OC]$ avec en O et en C deux demi-droites perpendiculaires à $[OC]$. On veut trouver un carré $EFGH$ ayant trois de ses sommets sur la forme ⊏. Prenons un point E sur $[OC]$. A partir de E on veut construire deux segments $[EH]$ et $[EF]$ perpendiculaires et de même longueur. C'est toujours possible d'une façon unique.

---

[2] Dans le cas où le triangle est rectangle, deux des trois carrés sont confondus, puisqu'ils ont tous deux un même sommet qui est le sommet de l'angle droit du triangle, d'où l'existence de deux carrés inscrits seulement. Et dans le cas où le triangle possède un angle obtus, on ne trouverait plus qu'un seul carré inscrit.



En effet, les triangles rectangles *CEH* et *OFE* doivent avoir des angles égaux et des hypoténuses de même longueur. Ils sont superposables. Si l'on pose *ye* = *OE* en prenant *OC* = 1, on a aussi *CH* = *ye*, et avec *EC* = 1 – *ye*, on a aussi *OF* = 1 – *ye*. Le milieu *I* de [*FH*] a pour coordonnées (1/2, 1/2) dans le repère orthonormé d'origine *O*. C'est aussi le centre du carré *EFGH*. On en déduit que lorsque *E* décrit [*CE*], le quatrième sommet *G* du carré *EFGH* décrit le segment [*U V*] tel que *OUVC* soit un carré. Notons que *UG* = 1 – *ye*.

Une conséquence immédiate est que le seul rectangle dans lequel on puisse inscrire un carré, avec ses quatre sommets sur chacun des quatre côtés du rectangle est un carré. Dans ce cas, il existe même une infinité de carrés inscriptibles.

Prenons maintenant un trapèze rectangle *OABC* avec deux angles droits en *O* et en *C*. En prenant *OC* = 1, posons *a* = *OA* et *b* = *CB* comme longueur des bases. On veut y inscrire un carré ayant ses sommets sur chacun des quatre côtés du trapèze. Grâce au résultat précédent, le quatrième sommet *G* du carré inscrit doit être sur le côté [*AB*], ce qui impose, en prenant pour *b* la grande base, que $a \leq 1$ et $b \geq 1$.

Donnons-nous un trapèze rectangle soumis aux conditions précédentes ($a \leq 1$, $b \geq 1$, avec *OC* = 1). Le côté [*AB*] coupe [*UV*] en *G* (*figure 4*). Connaissant *G*, on peut construire le carré *EFGH* unique, comme on l'a fait précédemment. Mais ce carré ne sera vraiment inscrit dans le trapèze que si le point *A* est « à droite » de *F*.

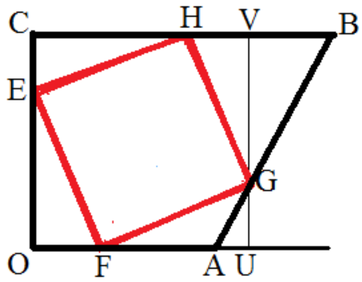
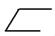


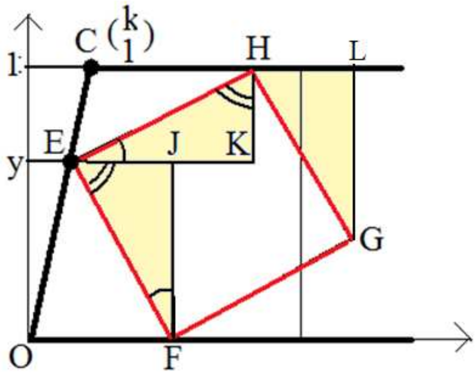
Figure 4 : Carré unique *EFGH* inscrit dans le trapèze rectangle *OABC*

Déterminons l'ordonnée *yg* de *G*. Avec *AU* = 1 – *a* et *VB* = *b* – 1, on a *GU* / *GV* = *AU* / *VB* (Thalès élargi), soit *yg* / (1 – *yg*) = (1 – *a*) / (*b* – 1). On en déduit que *yg* = (1 – *a*) / (*b* – *a*). Comme l'abscisse de *F* est aussi égale à *yg* et que *A* a pour abscisse *a*, on obtient la nouvelle contrainte : $a \geq yg$, soit
$a \geq (1 - a) / (b - a)$. Le calcul donne $b \geq (1 - a + a^2) / a$.

Finalement tout trapèze rectangle *OABC* ayant ses deux bases *a* et *b* telles que $a \leq 1$, $b \geq 1$ (on a supposé *OC* = 1), et $b \geq (1 - a + a^2) / a$, admet un carré unique ayant ses quatre sommets sur les quatre côtés du trapèze. Sinon, il n'y a pas de carré inscriptible.

4. Carré dans un parallélogramme

Commençons par insérer un carré dans cette forme : , avec un segment oblique [*OC*], et deux demi-droites parallèles, l'une à partir de *O* et l'autre à partir de *C*.



En prenant un repère orthonormé d'origine *O*, le point *C* a pour coordonnées (*k*, 1) avec $k > 0$. La figure obtenue est ainsi caractérisée par ce nombre *k*. Puis prenons un point quelconque *E* sur [*OC*], et construisons les points *F* et *H* sur chacune des demi-droites parallèles, de façon que *EF* = *EH*.[3] On obtient ainsi un carré *EFGH* ayant trois de ses sommets sur chacune des lignes de la forme initiale. Comme indiqué sur la figure ci-contre, les triangles rectangles *EKH* et *JFE* ont non seulement leurs angles égaux, et aussi leur hypoténuses égales *EH* et *EF*. Les coordonnées des points concernés s'en déduisent :

E (*ky*, *y*) avec *y* entre 0 et 1.
Avec $KH = 1 - y$, et et $JF = y$, les égalités $EJ = KH$ et $EK = JF$ donnent :
J ($ky + 1 - y$, *k*)
F ($ky + 1 - y$, 0)
H ($ky + y$, 1)

Le triangle *GLH* est aussi superposable avec les triangles *EKH* ou *JFE* (*voir figure ci-dessus*), ce qui permet d'avoir les coordonnées *xg* et *yg* du quatrième sommet *G* du carré :

$$G\begin{cases} xg = ky + y + 1 - y = ky + 1 \\ yg = 1 - y \end{cases}$$

En éliminant *y*, on obtient une relation entre *xg* et *yg*, soit $yg = 1 - (xg - 1) / k$, ou $yg = - xg / k + 1 - 1 / k$. Le point *G* se trouve sur une droite de pente $- 1 / k$ opposée à celle de (*OC*). Plus précisément, lorsque *E* va de *O* à *C*, *G* va de *C'* à *O'* avec *C'*(1, 1) et *O'*(1 + *k*, 0) (*figure 5 à gauche*).Mais en faisant cela, avec *y* allant de 0 à 1, le point *H* se déplace sur la droite d'ordonnée 1, et va d'une abscisse 0 à une abscisse $k + 1$. Mais l'on veut qu'il soit à droite du point *C*. Cela impose une valeur minimale à *y*, celle-ci étant obtenue lorsque *H* est en *C*, ce qui donne $y = k / (k + 1)$, ordonnée du point *E'* de la *figure 5 à droite*, avec *G'* point correspondant du carré. Finalement, le point *G* décrit le segment [*G' O'*], avec *G'* ($(k^2 + k + 1) / (k + 1)$, $1 / (k + 1)$) et *O'*($k + 1$, 0).

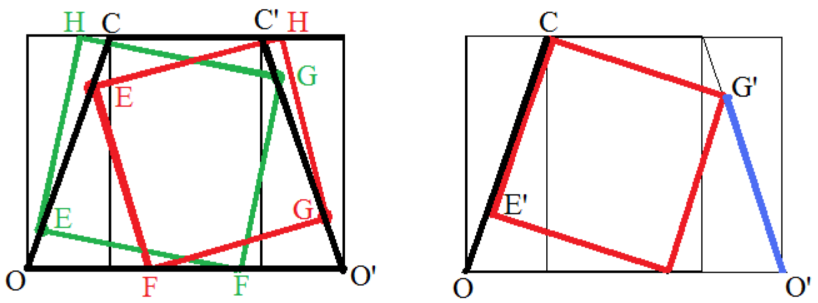


Figure 5 : A gauche, deux carrés obtenus, mais le carré vert correspondant à une petite valeur de l'ordonnée de *E* n'est pas valable, car *H* n'est pas sur la demi-droite issue de *C*, tandis que le carré rouge convient. A droite, le cas limite avec le point *E'*. Le point *G* décrit le segment bleu [*G' O'*].

Prenons maintenant un parallélogramme *OABC*. Sans perte de généralité, il est caractérisé par l'abscisse *k* du point *C* d'ordonnée 1, comme sur les figures précédentes, et par la longueur *a* de sa base [*OA*]. Il s'agit d'inscrire un carré dont les quatre sommets sont situés sur chacun des quatre côtés du parallélogramme. Ce que nous avons fait précédemment permet de construire un carré unique s'appuyant sur trois côtés, dont [*OC*], les deux autres étant éventuellement prolongés. Il reste à faire en sorte que le quatrième sommet *G* soit sur le côté [*AB*]. Cela impose que ce côté traverse le segment

[3] On verra plus bas que ce n'est pas toujours possible.

[*G'O'*], ce qui donne une condition sur la longueur *a* du côté [*OA*], le sommet *A* devant être situé entre *O'* et *O''* (*figure 6*).

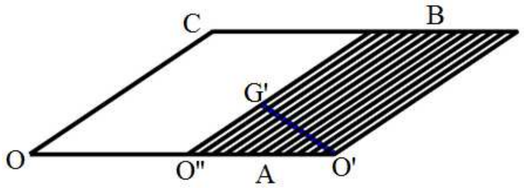


Figure 6 : La position du point *C* étant donnée, les parallélogrammes pouvant contenir un carré ont leur sommet *A* compris entre *O'* et *O''*

On sait que l'abscisse du point *O'* est $k + 1$, celle du point *O''* est $x_{O''} = x_{G'} - k / (k + 1)$ comme on peut le voir sur la *figure 5 à droite*, et $x_{O''} = (k^2 + 1) / (k + 1)$.

Finalement, connaissant l'angle en *O* du parallélogramme *OABC* et la longueur du côté [*OC*], c'est-à-dire les coordonnées (k, 1) du point *C* dans le repère concerné (la hauteur du parallélogramme étant prise comme unité), il existe une infinité de parallélogrammes dans lesquels peut être inscrit un carré unique, leur côté $a = OA$ devant être compris dans l'encadrement :

$$\frac{k^2+1}{k+1} \le a \le k+1$$

Un résultat est donné sur la *figure 7*.

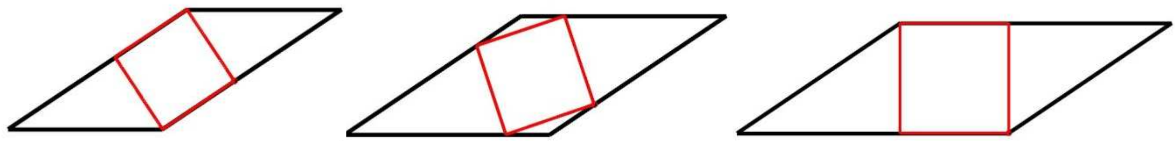
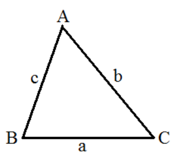


Figure 7 : Carré inscrit dans des parallélogrammes où le point *C* a toujours la même position par rapport à *O*, la longueur *a* du côté horizontal passant de sa longueur minimale à sa longueur maximale

Remarque : Evidemment, tout ce qui vient d'être traité théoriquement doit être expérimenté sur ordinateur. Les programmes correspondants sont une application directe des constructions géométriques que nous avons faites. Notamment les *figures 3* et *7* sont les résultats de programmes.

5. Carré dans un quadrilatère convexe



Nous reprenons ici la méthode de C.M. Hebbert (*cf. note 1*), utilisant la formule des sinus dans un triangle, soit $a\ / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$, avec les notations de la figure ci-contre.[4]

Prenons un quadrilatère *ABCD* (*figure 8*). Celui-ci peut être caractérisé par la longueur *AB* de sa base, prise égale à 1, par la longueur *h* du côté [*BC*], ainsi que par ses trois angles *a*, *b*, *c* de ses sommets *A*, *B*, *C*, avec $a + b + c < 360°$ (la somme des quatre angles d'un quadrilatère étant égale à 360°, sans aucun angle rentrant). Supposons que l'on puisse y inscrire un carré avec ses quatre sommets *VWTU* sur chacun des côtés du quadrilatère, et appelons $v = BV$, $w = BW$, $L = VW$, ainsi que *d* l'angle fait par le côté [*VU*] avec la base [*AB*] du quadrilatère. Nous allons utiliser la formule des sinus dans les trois triangles *BVW*, *CWT* et *AVU*. Dans *BVW* les angles sont b, $90 - d$, $90 - b + d$. Dans *CWT*, les angles sont c, $b - d$, $180 - b - c + d$. Dans *AVU*, les angles sont a, d, $180 - a - d$.

[4] Comme C.M. Hebbert ne donne que la formule finale sur l'angle *d* sans indiquer les calculs, nous précisons ici la marche à suivre pour ces calculs.

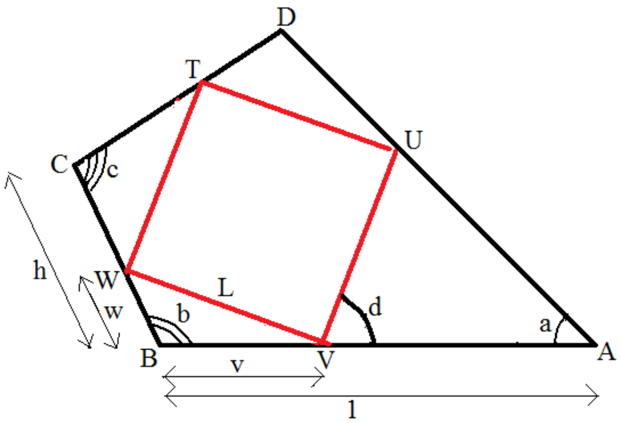


Figure 8 : Le quadrilatère *ABCD* et un carré *VWTU* inscrit

On obtient les formules :
$L / \sin b = v / \cos(b - d) = w / \cos d$ dans *BVW*
$L / \sin c = (h - w) / \sin(b + c - d)$ dans *CWT*
$L / \sin a = (1 - v) / \sin(a + d)$ dans *AVT*
On obtient ainsi quatre équations à quatre inconnues *L*, *v*, *w*, *d*.

Groupons les équations contenant *w* : $L = w \sin b / \cos d = (1 - v) \sin a / \sin(a + d)$. On en déduit *w* en fonction de *d* :

$$\boldsymbol{w = h \sin c \cos d / (\sin b \sin(b + c - d) + \sin c \cos d)}$$

Groupons les équations contenant *v* : $L = v \sin b / \cos(b - d) = \sin a (1 - v) / \sin(a + d)$. On en déduit *v* en fonction de *d* :

$$\boldsymbol{v = \sin a \cos(b - d) /(\sin b \sin(a + d) + \sin a \cos(b - d)}$$

Prenons enfin l'équation faisant le lien entre *v* et *w*, soit

$$\boldsymbol{w = v \cos d / \cos(b - d)}$$

En remplaçant par les valeurs de *v* et *w* en fonction de *d*, il reste une équation ne contenant plus que l'angle *d*. Il reste à appliquer les formules d'addition sur les cosinus et sinus, et l'on aboutit à :

$$\tan d = (\sin a \sin b \sin(b + c) + \sin a \sin c - h (\sin a \sin c (\sin b + \cos b)))$$
$$/ (\sin a \sin b \cos(b + c) + h (\cos a \sin b \sin c + \sin a \sin b \sin c))$$

Après division par $\sin a \sin b \sin c$, il reste :

$$\tan d = \frac{1 / \sin a + \cos b + \sin b \operatorname{cotan} c - h(1 + \operatorname{cotan} b)}{\cos b \operatorname{cotan} c - \sin b + h(\operatorname{cotan} a + 1)}$$

A partir de la tangente de l'angle *d*, on en déduit *d*, puis *v* et *w* grâce aux formules précédentes. On trouve donc un carré unique. Mais encore faut-il que le carré soit vraiment inscrit dans le quadrilatère, c'est-à-dire que *v* soit compris entre 0 et 1, que *w* soit entre 0 et *h*, et aussi que les points *T* et *U* soient sur les côtés [*CD*] et [*DA*]. En règle générale, on ne peut pas inscrire un carré dans un quadrilatère quelconque.[5]

[5] Si l'on n'impose pas que les quatre sommets du carré soient sur chacun des quatre côtés du quadrilatère, il peut exister d'autres carrés inscrits, avec deux de leurs sommets sur un même côté. Cela arrive notamment lorsque le quadrilatère est proche d'une forme triangulaire, sachant que l'on a trois carrés dans ce cas.

Quelques résultats sont donnés sur la *figure 9*.

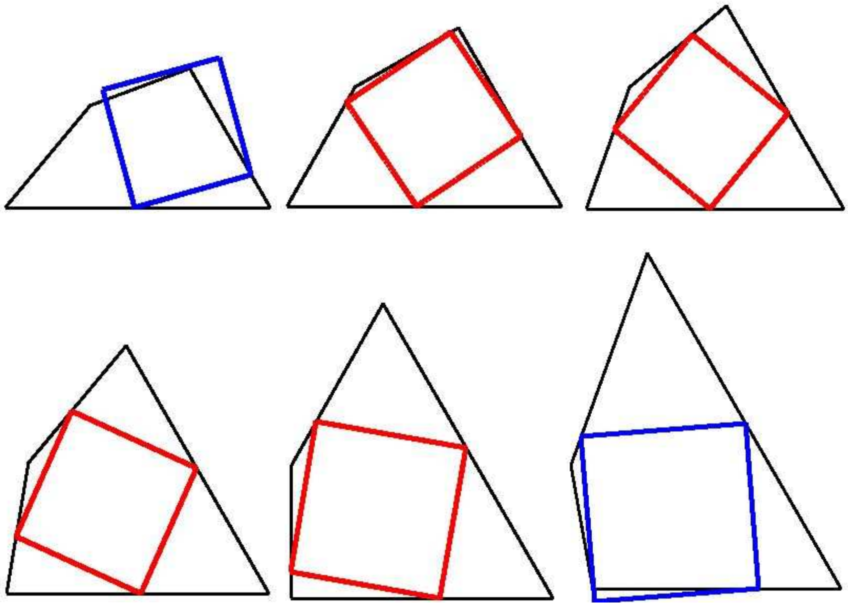


Figure 9 : Seul l'angle *b* varie en augmentant, les carrés rouges sont inscrits dans le quadrilatère, tandis que les carrés bleus ont leurs sommets *V* ou *W* hors des côtés, dans leur prolongement

Voici le programme correspondant :

```
h=0.5;  a=60./180.*M_PI;  b=80./180.*M_PI;  c=150./180.*M_PI; /* données initiales */
xa=1.;ya=0.;
xb=0.;yb=0.;   /* Le point B origine du repère orthonormé  */
for(b=50./180.*M_PI;b<110./180.*M_PI; b+=10./180.*M_PI) /* on fait varier l'angle b */
  { xc=h*cos(b);yc=h*sin(b);  /* le point C */
    xd=(tan(b+c)*xc+tan(a)-yc)/(tan(b+c)+tan(a));yd=-tan(a)*(xd-1.);  /* le point D */
    dessinquadrila();
    tgd=(1./sin(b)+cos(b)+sin(b)/tan(c)-h*(1.+1/tan(b))) /( cos(b)/tan(c)-sin(b)+h*(1.+1./tan(a)));
    d=atan(tgd);
    v=sin(a)*cos(b-d)/(sin(b)*sin(a+d)+sin(a)*cos(b-d));
    w=v*cos(d)/cos(b-d);
    xt=w*sin(b)+w*cos(b);  yt=v-w*cos(b)+w*sin(b); /* le point T */
    xu=xt+v-w*cos(b); yu=yt-w*sin(b);  /* le point U */
    if (v>=0. && v<=1. && w>=0. && w<=h) carre(v,0,w*cos(b),w*sin(b),xt,yt,xu,yu,0);
    else carre(v,0,w*cos(b),w*sin(b),xt,yt,xu,yu,1);
  }
```

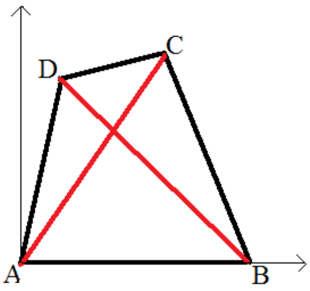
Avec les fonctions accessoires :

```
void dessinquadrila(void)
{
linewithwidth( xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,1,black);
linewithwidth( xorig+zoom*xb,yorig-zoom*yb,xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,1,black);
linewithwidth( xorig+zoom*xc,yorig-zoom*yc,xorig+zoom*xd,yorig-zoom*yd,1,black);
linewithwidth( xorig+zoom*xd,yorig-zoom*yd,xorig+zoom*xa,yorig-zoom*ya,1,black);
}
void carre(float x,float y, float xx,float yy,float xxx,float yyy, float xxxx, float yyyy, int c)
{ linewithwidth( xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,xorig+zoom*xx,yorig-zoom*yy,2,color[c]);
    linewithwidth( xorig+zoom*xx,yorig-zoom*yy,xorig+zoom*xxx,yorig-zoom*yyy,2,color[c]);
    linewithwidth( xorig+zoom*xxx,yorig-zoom*yyy,xorig+zoom*xxxx,yorig-zoom*yyyy,2,color[c]);
    linewithwidth( xorig+zoom*xxxx,yorig-zoom*yyyy,xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,2,color[c]);
}
```

6. Quadrilatère convexe et carré circonscrit au quadrilatère

Nous allons maintenant prendre un quadrilatère convexe ABCD, et chercher à construire un carré EFGH qui lui soit circonscrit, avec les sommets du quadrilatère sur ses côtés.

6.1. Construction d'un quadrilatère convexe



Donnons-nous un quadrilatère convexe *ABCD*. Sans perte de généralité, on peut le placer dans un repère orthonormé d'origine *A*, avec le vecteur **AB** comme vecteur unité sur l'axe des *x*, soit *A*(0, 0) et *B*(1, 0). Le troisième sommet *C*(*xc*, *yc*) peut être choisi avec une ordonnée positive : $yc > 0$.[6] On sait aussi qu'un quadrilatère *ABCD* convexe (pas d'angle rentrant ni de croisement d'arêtes) a comme caractéristique d'avoir ses diagonales [*AC*] et [*BC*] qui se coupent. Le quatrième sommet *D* (*xd*, *yd*) a donc une ordonnée positive aussi : $yd > 0$, et l'on impose que les segments [*AC*] et [*BD*] se coupent. Cela signifie que :

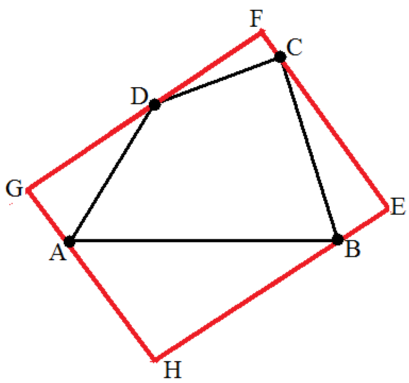
* *D* est à gauche de **AC** (*B* étant déjà à droite), soit $\begin{vmatrix} xc & xd \\ yc & yd \end{vmatrix} > 0$,

$xc\, yd - yc\, xd > 0$

* *C* est à droite de **BD** (*A* étant déjà à gauche), soit $\begin{vmatrix} xc-1 & xd-1 \\ yc & yd \end{vmatrix} > 0$,

$(xc - 1)\, yd - yc\, (xd - 1) > 0$.

6.2. Rectangles circonscrits à un quadrilatère



Traçons une droite D_1 de pente négative passant par *A* et menons la parallèle à cette droite passant par *C*, en faisant en sorte que le quadrilatère soit à l'intérieur de la bande délimitée par ces deux droites. Puis menons une droite perpendiculaire à D_1 passant par *C* et une autre passant par *B*. On obtient ainsi un rectangle, et on peut toujours choisir la droite D_1 de façon que ce rectangle soit circonscrit au quadrilatère, avec les sommets du quadrilatère sur les côtés du rectangle. Il existe une infinité de rectangles circonscrits (*figure 10*).

Traitons plus précisément le cas où les angles en *A* et *B* sont aigus, et avec $yd < yc$.[7] La pente *m* négative de la droite D_1 a pour valeur maximale celle de la droite perpendiculaire à (*AD*), sinon le point *A* serait dans le prolongement du côté [*GH*] du rectangle. Ensuite la pente *m* peut diminuer jusqu'à une valeur minimale. Celle-ci est le maximum entre la pente de (*BC*) et celle de la perpendiculaire à (*DC*) (*figure 10 à droite*).

[6] Sans perte de généralité, quitte à changer les lettres attribuées aux sommets, on pourrait aussi imposer que l'angle en *B* soit aigu, d'où $xc \leq 1$.

[7] On peut en effet prendre $yd < yc$, car si $yd > yc$, il suffit de faire une symétrie horizontale pour revenir au cas précédent. Avec *A* et *B* angles aigus, *xc* et *xd* sont tous deux compris entre 0 et 1. Par contre, toujours avec l'angle *B* aigu, le cas que nous n'avons pas traité est celui où l'angle en *A* est obtus.

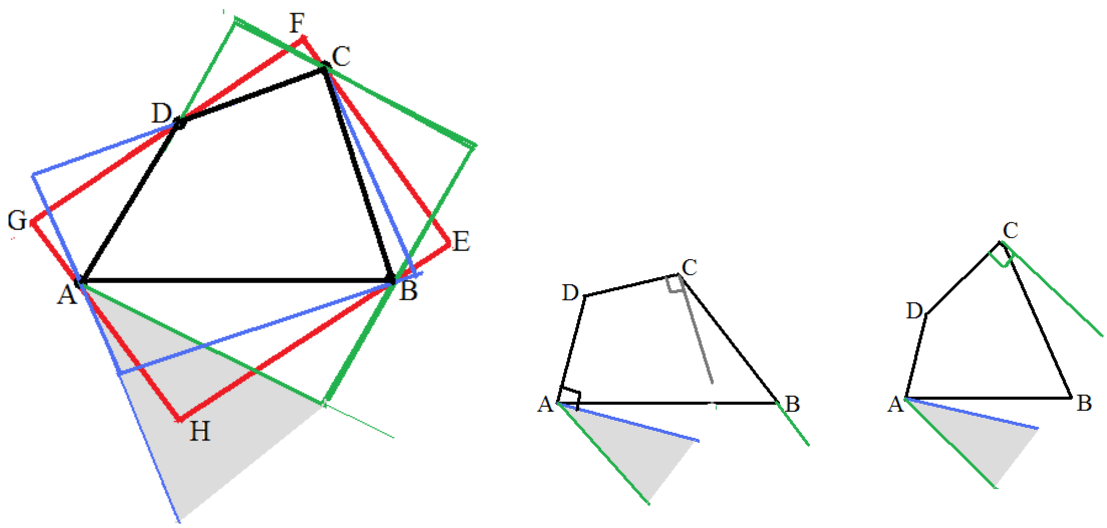


Figure 10 : A gauche, les deux rectangles circonscrits extrêmes, l'un en vert, l'autre en bleu, avec un cas intermédiaire en rouge, parmi l'infinité des cas possibles. A droite, la zone en gris dans laquelle doit se situer le côté *GH* du rectangle, la valeur minimale en vert étant la parallèle à (*BC*) dans le premier cas, et la perpendiculaire à (*DC*) dans le deuxième cas.

A partir d'une valeur convenable de la pente m de (*AH*), déterminons les coordonnées des quatre sommets du rectangle *EFGH* circonscrit.

Equation de (*GH*) : $Y = m\,X$
Equation de (*HE*) ; $Y = (-1 / m)\,(X - 1)$
Equation de (*EF*) : $Y = m\,(X - xc) + yc$
Equation de (*FG*) ; $Y = (-1 / m)\,(X - xd) + yd$

En procédant aux intersections de ces droites, on trouve les points

$$E\begin{pmatrix} xe = (1 + m^2\,xc - m\,yc) / (m^2 + 1) \\ ye = -(1/m)(xe - 1) \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} xf = (m^2\,xc - m\,yc + xd + m\,yd) / (m^2 + 1) \\ yf = m\,xf - m\,xc + yc \end{pmatrix}$$

$$G\begin{pmatrix} xg = (xd + m\,yd) / (m^2 + 1) \\ yg = m\,xg \end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix} xh = 1 / (m^2 + 1) \\ yh = m\,xh \end{pmatrix}$$

6.3. Carrés circonscrits

Parmi les rectangles circonscrits obtenus, existe-t-il des carrés ? Imposons aux rectangles d'avoir deux côtés consécutifs de même longueur. La longueur du côté [*EH*] est aussi la distance d_1 de C à la droite (*GH*), d'équation $Y = m\,X$, ou encore $Y - m\,X = 0$, soit

$d_1 = (yc - m\,xc) / \sqrt{m^2 + 1}$, et l'on a bien $yc - m\,xc > 0$ car C est au-dessus de (*GH*).

D'autre part la longueur du côté [*GH*] est la distance d_2 de D à la droite (*EH*), d'équation $Y = (-1 / m)(X - 1)$, ou $mY + X - 1 = 0$, soit

$d_2 = (1 - xd - m\,yd) / \sqrt{m^2 + 1}$, et l'on a bien $1 - xd - m\,yd > 0$, car D est au-dessus de (*HE*), dans la zone où $Y > (-1 / m)(X - 1)$, soit $mY + X - 1 < 0$ puisque $m < 0$.

On trouve un carré si et seulement si $d_1 = d_2$, $yc - m\,xc = 1 - xd - m\,yd$,

$$m = \frac{1 - xd - yc}{yd - xc} \text{ si } yd \neq xc.$$

Finalement il existe un carré circonscrit unique lorsque la valeur de *m* est située dans sa zone de validité (*figure 11*), et aucun sinon (*figure 12*).

Mais il existe un cas spécial lorsque $yd = xc$ et $xd = 1 - yc$, l'équation en *m* devenant $0\,m = 0$, et dans ce cas tous les rectangles circonscrits sont des carrés, et l'on a une infinité de solutions. Avec les vecteurs **AC** (xc, yc) et **BD** ($xd - 1$, yd), le fait d'avoir $yd = xc$ et $xd = 1 - yc$ signifie qu'avec **AC** (xc, yc) et **BD** ($-yc$, xc), les vecteurs ont même longueur et sont orthogonaux, plus précisément (**AC**, **BD**) = $\pi/2$. Il existe une infinité de carrés circonscrits au quadrilatère *ABCD* si et seulement si ce quadrilatère a ses diagonales orthogonales et de même longueur.[8]

6.4. Programme, dans le cas où les angles en *A* et *B* sont aigus[9]

```
xa=0.;ya=0.; xb=1.;yb=0.;
do          /* constuction du quadrilatère convexe ABCD au hasard avec yd < yc */
  { xc=(float)(1+rand()%100)/100.;
    xd=(float)(1+rand()%100)/100.;
    do { yc=(float)(1+rand()%100)/70.;
         yd=(float)(1+rand()%100)/70.;
       }
    while(yd >= yc);
  }
while (!(xc*yd-yc*xd>0. &&  xc*yd-yc*xd-yd+yc>0.) ); /* quadrilatère convexe */
dessinquadrila(); /* cette fonction dessine le quadrilatère ABCD */

m1=yc/(xc-1.);m2=(xc-xd)/(yd-yc); if (m1<m2) mmax=m2; else mmax=m1;
for(m=-xd/yd;m>mmax;m-=0.05)  /* m varie entre ses deux limites */
   { dessinquadrila();
     xe=(1.+m*m*xc-m*yc)/(m*m+1.), ye=-1./m*(xe-1.);
     xf=(m*m*xc-m*yc+xd+m*yd)/(m*m+1.); yf=m*xf-m*xc+yc;
     xh=1./(m*m+1); yh=m/(m*m+1.);
     xg=(xd+m*yd)/(m*m+1.); yg=m*xg;
     rectangle(xe,ye,xf,yf,xg,yg,xh,yh,0); /* cette fonction dessine EFGH avec la couleur 0 */
   }

dessinquadrila();
m=(xd+yc-1.)/(xc-yd); /* valeur de m pour laquelle le rectangle est un carré */
xe=(1.+m*m*xc-m*yc)/(m*m+1.), ye=-1./m*(xe-1.);
xf=(m*m*xc-m*yc+xd+m*yd)/(m*m+1.); yf=m*xf-m*xc+yc;
xh=1./(m*m+1); yh=m/(m*m+1.);
xg=(xd+m*yd)/(m*m+1.); yg=m*xg;
rectangle(xe,ye,xf,yf,xg,yg,xh,yh,1); /* desssin de EFGH qui est ici un carré */
```

Des résultats sont donnés sur les *figures 11* et *12*.

[8] Un tel quadrilatère est appelé pseudo-carré. Ce cas est aussi traité par C.M. Hebbert.

[9] L'autre cas est celui où *B* est aigu et *A* obtus. Les contraintes sur la pente *m* changent, mais les formules donnant le carré restent valables.

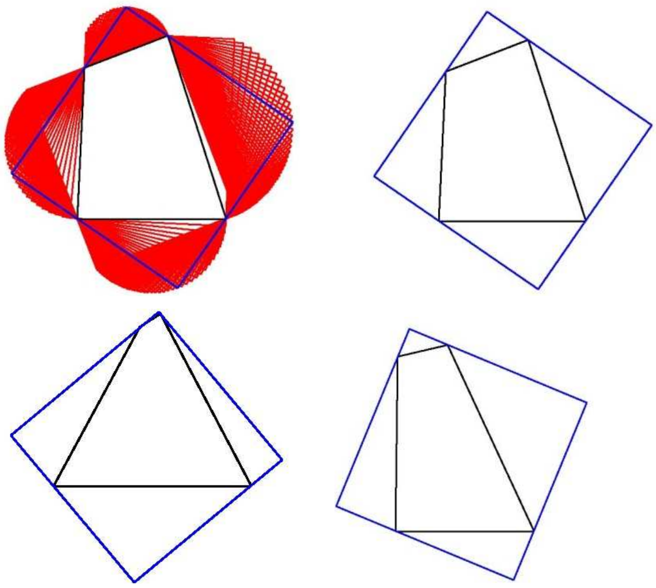


Figure 11 : Trois exemples de carré circonscrit à un quadrilatère. En haut un cas, avec à gauche le carré bleu dans la zone rouge des rectangles circonscrits, et à droite le même carré circonscrit. En bas, deux autres cas de carrés circonscrits

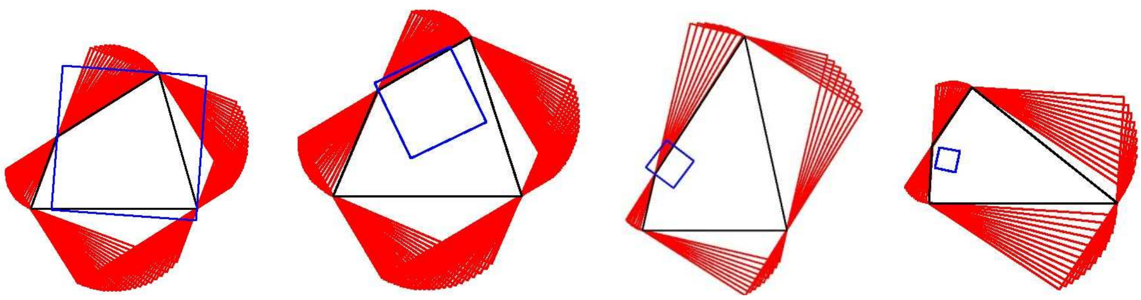


Figure 12 : Exemples de quadrilatères n'ayant pas de carré circonscrit. En rouge les rectangles circonscrits, et en bleu le carré qui n'est pas dans la zone des rectangles, et donc qui n'est pas circonscrit. Mais les sommets du quadrilatère sont toujours sur les côtés du carré prolongés en droites, à défaut d'être tous sur les côtés

Remarque finale : Nous avons étudié le cas où le quadrilatère avait deux angles aigus successifs (les deux autres pouvant être deux obtus ou un aigu et un obtus. L'autre cas est celui où il y a deux angles aigus à l'opposé, et deux angles obtus aussi, avec quelques résultats indiqués sur la *figure 13* dans le cas où un tel carré existe, obtenus par le même programme que précédemment.

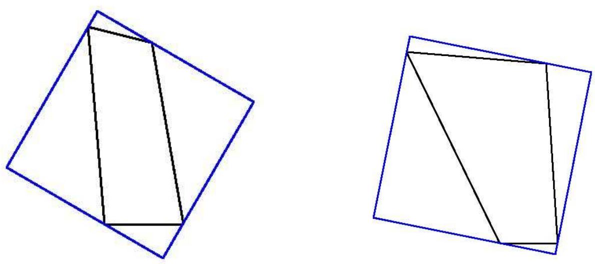


Figure 13 : Carré circonscrit pour des quadrilatères ayant deux angles aigus opposés et deux angles obtus opposés