Géométrie sphérique : plus courts chemins, théorème de Girard, relations trigonométriques, isométries de la sphère

Au cours de l'histoire, l'étude de la géométrie sphérique a d'abord été l'oeuvre d'astronomes. Avant de devenir la géométrie de la sphère terrestre, cette géométrie a été celle de la sphère céleste. Dans son *Almageste*, Ptolémée (années 200) fait référence aux travaux des Egyptiens et des Babyloniens en la matière, des milliers d'années auparavant. Mais le premier manuscrit qui ait été conservé jusqu'à nos jours est celui du grec Autolycos de Pilate (années – 400). Bien avant Ptolémée, d'autres mathématiciens-astronomes grecs se sont illustrés, comme Theodosius qui écrit *les Sphériques* dans les années – 200, puis Menelaus d'Alexandrie (années – 100) dont l'ouvrage *les Sphériques*[1] a été conservé grâce à sa traduction en arabe.

Plus tard, entre les années 800 et 1200, de nombreux mathématiciens arabo-persans développent à leur tour la géométrie et la trigonométrie sphériques. Citons notamment Al Khwarizmi, Ibn Qurra (années 800-900), Ibn Iraq et Al Biruni (années 1000), Al Tusi (années 1200). Puis en Europe, Regiomontanus (années 1400) reprend les travaux de l'astronome maghrébin Ibn Aflah, et de nombreux savants développent ensuite la géométrie sphérique, notamment N. Copernic (années 1500), F. Viète, A. Girard (années 1600) et L. Euler (années 1700). Les principales propriétés de la géométrie sphérique sont alors connues et démontrées[2].

Nous allons maintenant rappeler ces propriétés, en commençant par définir les concepts de longitude et de latitude, par analogie avec la sphère terrestre.

La sphère est définie par son centre et son rayon R. Pour simplifier, nous supposons que le centre de la sphère est le point O, origine du repère en 3 dimensions. Un point M (x, y, z) appartient à la sphère si et seulement si $OM = R$, ce qui revient à $OM^2 = R^2$, et en appliquant le théorème de Pythagore, par analogie avec le cercle, on trouve :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Cette relation entre x, y et z est l'équation de la surface de la sphère. Mais cette formule n'est pas toujours très pratique. On préfère déterminer la position d'un point M sur la sphère par le méridien et le parallèle sur lesquels il se trouve, le méridien étant un demi grand cercle passant par les pôles, et le parallèle un cercle dans un plan parallèle à celui de l'équateur.[3] Cela revient à se donner sa longitude et sa latitude. Les coordonnées d'un point M sur la sphère dépendent des deux angles φ -la longitude,

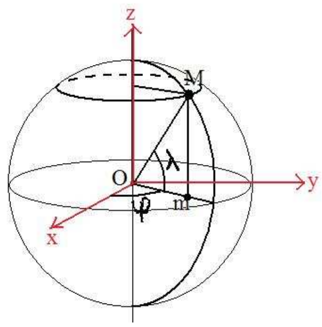
[1] Menelaus introduit la notion de plus court chemin entre deux points sur la sphère, et donne la version sphérique du théorème qui porte son nom en géométrie plane. Ce théorème peut s'énoncer ainsi : soit un triangle sphérique ABC. Si un grand cercle coupe les grands cercles AB, BC et CA en D, E et F, alors
$$\frac{\sin DA}{\sin DB}\,\frac{\sin EB}{\sin EC}\,\frac{\sin FC}{\sin FA}=1 .$$

[2] On pourra consulter à ce sujet le livre de A.B. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry* (Springer 2012).

[3] Pour voir comment construire une sphère avec ses méridiens et parallèles en utilisant une perspective cavalière particulièrement simple, et passer ainsi des coordonnées (x, y, z) d'un point de la sphère aux coordonnées (xe, ye) sur un écran d'ordinateur, on pourra se référer à *Géométrie 3d*, dans le cours *graphisme et géométie*, rubrique *enseignements* sur mon site *pierreaudibert.fr*.

et λ -la latitude, avec φ compris entre 0 et 2π, et λ entre - $\pi/2$ et $\pi/2$. D'où les équations paramétriques de la sphère, avec les coordonnées de *M* en fonction de φ et λ :

$$x = R \cos\lambda \cos\varphi$$
$$y = R \cos\lambda \sin\varphi$$
$$z = R \sin\lambda$$



1. Grands cercles et petits cercles

La géométrie sphérique est un exemple de géométrie non-euclidienne, come on va le constater. Commençons par prendre deux points *A* et *B* sur la sphère. Un plan passant par ces deux points coupe la sphère suivant un cercle. Si les deux points ne sont pas aux antipodes d'un de l'autre, et que l'on fait tourner le plan, on obtient soit des petits cercles, soit un grand cercle, lorsque le plan passe par le centre *O* de la sphère, et ce grand cercle coupe la phère suivant deux hémisphères de même surface (*figure 1*). Par contre si les deux points sont aux antipodes (comme le pôle nord et le pôle sud), on n'obtient que des grands cercles.

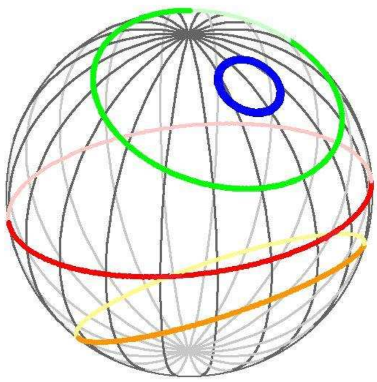


Figure 1 : Intersection de la sphère et de plans, avec des petits cercles et un grand cercle (*en rouge*).

2. Plus court chemin entre deux points

Reprenons les deux points de la sphère *A* et *B* non situés aux antipodes, et le grand cercle unique qui passe par ces points, situé dans le plan *OAB*. Cela donne deux arcs entre ces points, l'un étant plus court que l'autre. On démontre alors que le plus court chemin entre ces deux points est unique et qu'il s'agit de l'arc de grand cercle le plus court joignant ces deux points (*figure 2*). Par analogie avec la géométrie euclidienne où le plus court chemin est la ligne droite et que par deux points passe un droite unique, un grand cercle de la sphère peut être considérée comme une *droite*. Mais cette droite n'obéit pas aux mêmes axiomes que ceux de la géométrie euclidienne. Cette dernière indique que par un point passe une unique droite parallèle à une droite donnée, c'est-à-dire qui ne la coupe jamais. Par contre en géométrie sphérique, deux grands cercles -c'est-à-dire deux *droites*- se coupent toujours en deux points situés aux antipodes l'un de l'autre. Il n'existe plus de droites parallèles en géométrie sphérique.

De plus une droite sphérique a une longueur finie, et non plus infinie. Enfin, dans le cas particulier où les points *A* et *B* sont aux antipodes, il existe une infinité de grands cercles passant par ces deux points. C'est une autre entorse à la géométrie euclidienne où par deux points ne passe qu'une seule ligne droite.

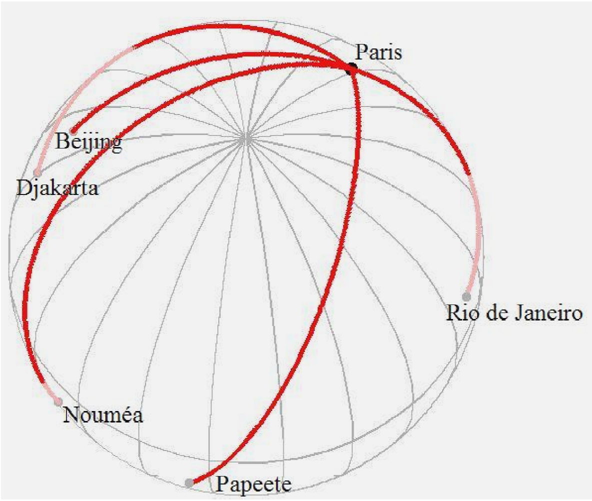


Figure 2 : Exemples de plus courts chemins sur la sphère terrestre.

2.1. Esquisse de démonstration sur le plus court chemin

Dans tout ce qui suit, nous considérons la sphère ayant un rayon unité.

Prenons deux points *A* et *B* sur la sphère. Pour faciliter les calculs, et quitte à pratiquer des rotations, faisons en sorte que le point *A* soit au pôle nord, et que le point *B* soit sur le méridien d'origine, c'est-à-dire dans le plan *xOz*. L'objectif est de montrer que l'arc de grand cercle (ou de méridien) entre *A* et *B* est le plus court chemin sur la sphère entre ces points, par rapport à d'autres arcs de cercle eux aussi sur la sphère[4]. Pour cela plaçons le point *C* à l'intersection de la droite (*AB*) et et de l'axe [*Ox*), et posons *OC* = *a*.

Puis prenons un point quelconque sur l'axe [*Oy*) tel que *OD* = *b*. On obtient ainsi le plan *ACD*, qui varie en fonction de *b* (*figure 3*). Ce plan coupe la sphère suivant un cercle passant par *A* et *B*, ce cercle ayant pour centre le projeté orthogonal *H* du point *O* sur le plan. A cause de l'angle droit, son rayon *R* est tel que $OH^2 + R^2 = 1$ (1 étant le rayon de la sphère). Le plan *ACD* a pour équation $x/a + y/b + z = 1$, et la distance *OH* vaut :

$$OH = \frac{1}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1}}\text{, d'où } R^2 = 1 - \frac{1}{1/a^2 + 1/b^2 + 1}.$$

Le rayon est maximal lorsque $\frac{1}{1/a^2 + 1/b^2 + 1}$ est minimal, c'est-à-dire lorsque $1/a^2 + 1/b^2 + 1$ est maximal, c'est-à-dire pour *b* le plus petit possble, ce qui se produit pour *b* = 0, auquel cas le cercle est dans le plan *xOz*, ce qui correpond à un arc de grand cercle entre *A* et *B*. Or il est bien connu que plus un cercle passant par deux points a un rayon grand, plus la courbure est faible et plus l'arc de cercle entre *A* et *B* est court. L'arc de grand cercle correspond bien au chemin le plus court entre *A* et *B*.

[4] Cela limite la démonstration puisque l'on se contente de chemins formés d'arcs de cercle.

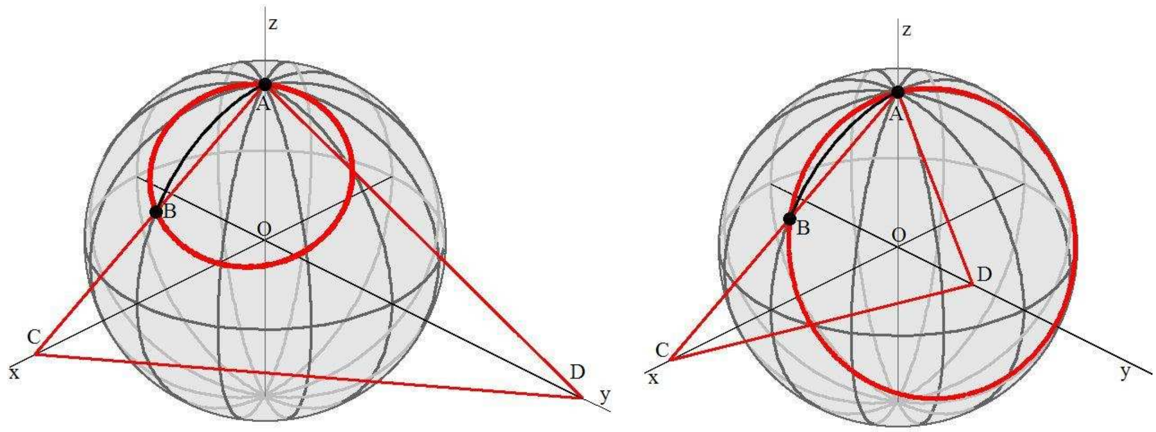


Figure 3 : *A gauche* un petit cercle passant par *A* et *B* dans le plan *ACD*, *à droite*, le grand cercle donnant le plus court chemin de *A* à *B* sur la sphère.

2.2. Distance entre deux points

La distance entre deux points *A* et *B* sur la sphère est la longueur de l'arc de grand cercle qui les joint, soit l'angle au centre *AOB* en radians, le rayon de la sphère étant pris égal à 1 (*figure 4*). Si l'on connaît les coordonnées des points *A* et *B* sur la sphère unité, on a aussi

$\cos(AOB) = x_A\, x_B + y_A\, y_B + z_A\, z_B$ grâce au produit scalaire **OA OB**.

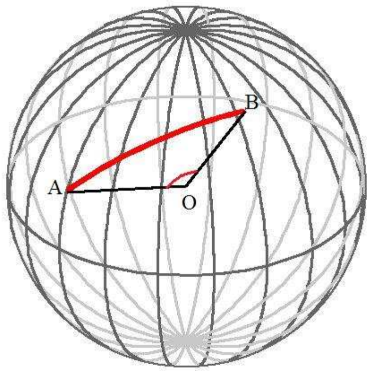


Figure 4 : Distance entre deux points sur la sphère unité. Cette distance est un angle en radians.

3. Aire d'une tranche (ou bigone) de la sphère

Prenons deux points aux antipodes, comme le pôle nord et le pôle sud. En traçant deux demi-cercles méridiens entre ces deux points, séparés par un angle θ (inférieur à π), on obtient une surface en forme de tranche (ou bigone ou lune). Sachant que l'aire de la sphère de rayon unité est 4π et que celle-ci correspond à un tour complet d'angle 2π, l'aire de cette tranche est $\dfrac{\theta}{2\pi} \times 4\pi = 2\theta$ (*figure 5*).

Remarquons que le bigone, polygone à deux côtés, est propre à la géométrie sphérique. Il n'existe pas en géométrie plane euclidienne.

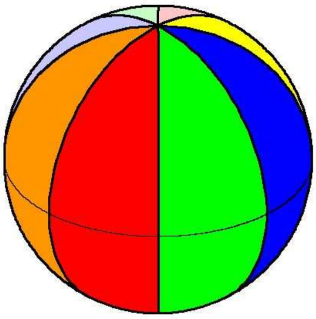


Figure 5 : Sphère découpée en huit tranches, chacune ayant pour aire $\pi/2$.

4. Aire d'un triangle sphérique et formule de Girard

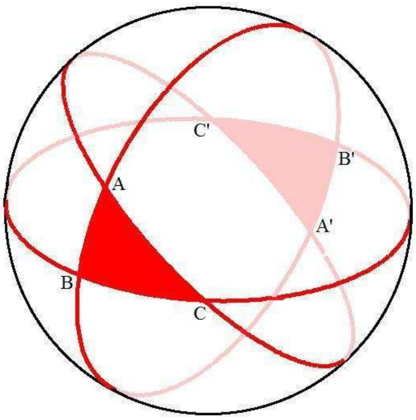
Un triangle sphérique *ABC* est délimité par trois arcs de grands cercles *AB*, *BC*, *CA*. Pour déterminer son aire *S*, traçons les trois grands cercles passant par *AB*, pat *BC* et par *CA* (*figure 6*). Ces grands cercles se recoupent aux antipodes, donnant le triangle sphérique *A'B'C'* qui a la même aire *S* que le triangle *ABC*. La surface située entre deux de ces grands cercles forme deux tranches de part et d'autre d'un sommet du triangle, comme la surface en vert délimitée par (*CA*) et (*CB*), avec ses sommets en *C* et *C*' (*cf. figure 6 à droite*). Ces deux tranches de sommets *C* et *C*' contiennent les triangles *ABC* et *A'B' C'*. Faisons de même avec les doubles tranches issues de *AA'* et de *BB*'. Les trois doubles tranches obtenues ont chacune en commun les deux triangles *ABC* et *A'B'C'*. Pour recouvrir la sphère sans chevauchement, ce qui donne l'aire 4π, il convient de prendre la totalité de la double tranche *CC*' (contenant les deux triangles), puis la double tranche *AA*' à laquelle on enlève les deux triangles, puis la double tranche *BB*' amputée aussi de ses deux triangles.

Appelons α, β, γ les trois angles du triangle *ABC*. Comme on l'a vu, l'aire de la double tranche *CC'* est égale à 4γ, et de même pour les autres. Grâce à la relation précédente, on obtient :

$4\pi = 4\gamma + 4\alpha - 2S + 4\beta - 2S$, soit

$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Cette formule est due à A. Girard (années 1600).



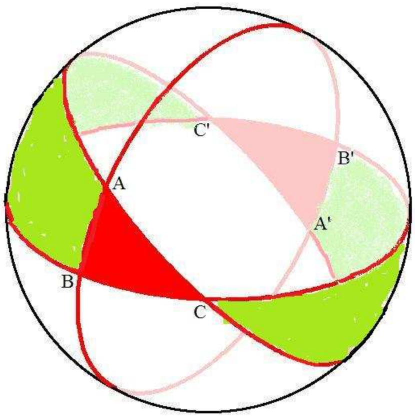


Figure 6 : Triangle sphérique *ABC* et découpage de la sphère suivant les grands cercles correspondants.

5. Relations trigonométriques dans un triangle sphérique

5.1. La formule des cosinus

Considérons un triangle sphérique *ABC* de côtés *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c* et d'angles *α*, *β*, *γ* en *A*, *B*, *C*. Pour simplifier les calculs, prenons un repère orthonormé *Oxyz* avec *A* sur (*Oz*), soit *A* (0, 0, 1), comme s'il était au pôle nord, et avec *B* dans le plan *xOz*, de longitude 0 et de latitude *λ* = *π*/2 – *AB* = *π*/2 – *c*, soit *B* (sin *c*, 0, cos *c*). Le troisième point *C* étant dans un plan qui fait l'angle *α* avec le plan *xOz*, sa longitude est *α* et sa latitude *λ* = *π*/2 – *AC* = *π*/2 – *b*, d'où *C* (cos *α* sin *b*, sin *α* sin *b*, cos *b*) (*figure 7*).

Exprimons de deux façons le produit scalaire **OB OC** :

OB OC = 1×1×cos(*BOC*) = cos(*arcBC*) = cos *a*
OB OC = sin *c* cos *α* sin *b* + cos *c* cos *b*

Finalement

$$\boxed{\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha\\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma\end{aligned}}$$

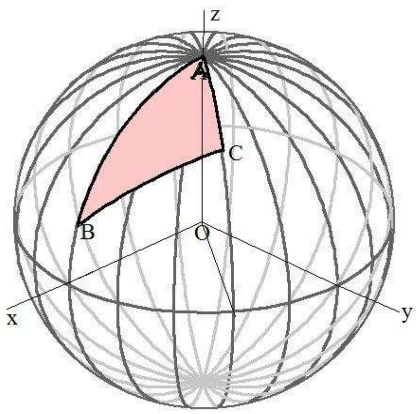


Figure 7 : Le triangle sphérique *ABC*.

5.2. La formule des sinus

Tirons l'angle α de la première formule précédente :

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{\sin^2 \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Par décalage des lettres, on constate que le second membre de l'égalité ne change pas. D'où finalement :

$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}$, et comme les angles sont tous compris strictement entre 0 et π, et les sinus positifs :

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}}$$

Cette formule exprime que les sinus des angles et les sinus des côtés sont proportionnels.

5.3. Cas d'un triangle rectangle

Pour un triangle rectangle *ABC*, avec l'angle droit en *C*, les formules[5] deviennent :

$\cos c = \cos a \cos b$

$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$

6. Triangle dual d'un triangle sphérique et relations duales

La perpendiculaire en *O* au plan contenant un grand cercle coupe la sphère en deux points antipodaux appelés pôles du grand cercle. Un exemple est l'équateur avec ses pôles nord et sud. Prenons maintenant un triangle sphérique *ABC*. Chacun de ses côtés est un arc de grand cercle, il admet donc deux pôles. Choisissons celui qui est dans l'hémisphère délimité par le grand cercle et où se trouve le triangle. Par exemple le pôle *A'* choisi est situé dans l'hémisphère délimité par le grand cercle (*BC*) et contenant le point *A*. On trouve ainsi un triangle *A'B'C'* associé au triangle *ABC*. Ce nouveau triangle est appelé le dual ou encore le triangle polaire de *ABC* (*figure 8*).

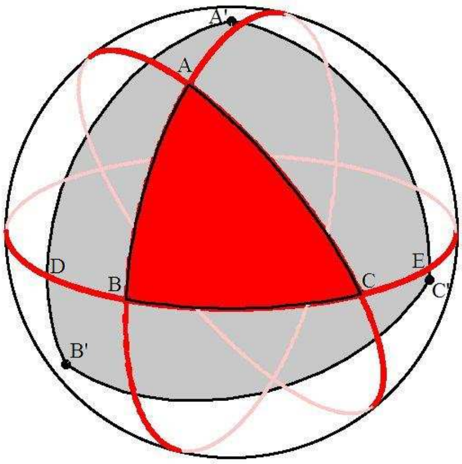


Figure 8 : Le triangle *ABC* et son dual, le triangle polaire *A'B'C'*.

Comme (*OA'*) est perpendiculaire à (*OB*) et (*OC*), et de même (*OB'*) perpendiculaire à (*OC*) et (*OA*), ainsi que (*OC'*) avec (*OA)* et (*OB*), on a aussi (*OA*) perpendiculaire à (*OB'*) et (*OC'*), avec *A* du même côté que *A'*. Il en est de même pour (*OB*) et (*OC*). A son tour, le triangle *ABC* est le dual de *A'B'C'*.

[5] Au cours de l'hisoire, les formules sur le triangle rectangle ont été connues et démontrées avant celles relatives à un triangle quelconque. Précisons que si le triangle est suffisamment petit, on est alors quasiment en géométrie plane et la formule $\cos c = \cos a \cos b$ redonne le théorème de Pythagore. En effet $\cos c \approx 1 - c^2/2$ et $1 - c^2/2 \approx (1 - a^2/2)(1 - b^2/2) \approx 1 - a^2/2 - b^2/2$, d'où $c^2 \approx a^2 + b^2$.

Appelons a', b', c' les longueurs des côtés du triangle $A'B'C'$ et α', β', γ' ses angles. On va trouver des relations simples entre ces grandeurs et celles du triangle ABC. Le grand cercle contenant BC coupe les côtés $A'B'$ et $A'C'$ du triangle dual en D et E, et *arc* $DE = \alpha'$. Cmme *arc* $BC = a$, on a :

$BC + DE = \alpha' + a$.

D'autre part, $BC + DE = BC + DB + BC + CE = DB + BC + BC + CE = DC + BE$. Comme la droite ($OC$) est perpendiculaire au plan $OA'B'$ et que D est dans ce plan, on a l'angle COD qui est droit, d'où *arc* $DC = \pi/2$. De même (OB), perpendiculaire à (OA') et (OC') l'est aussi avec (OE), d'où *arc* $BE = \pi/2$. Finalement :

$a + \alpha' = \pi$
$b + \beta' = \pi$
$c + \gamma' = \pi$

et par dualité
$a' + \alpha = \pi$
$b' + \beta = \pi$
$c' + \gamma = \pi$

L'intérêt du triangle dual est de donner de nouvelles formules, *duales* de celles déjà connues. Plaçons-nous dans le triangle $A'B'C'$, où l'on dispose de la formule :

$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha'$, puis utilisons les formules que nous venons de trouver : $a' = \pi - \alpha$, etc. On obtient :

$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \gamma) \cos(\pi - a)$, soit :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}}$$

Les formules duales l'une de l'autre que nous avons obtenues, où les longeuurs de côtés et les angles s'échangent, ont des conséquences importatnes. La connaissance des trois longueurs donne les trois angles, et vice versa. Ainsi deux triangles isométriques, ayant leurs 3 côtés respectifs de même longueur, ont aussi leurs 3 angles égaux, et inversement deux triangles qui ont leurs 3 angles respectifs égaux sont isométriques.[6]

Nous nous contenterons de ces formules ici, mais il en existe bien d'autres, attribuées notamment à J. Napier, S. l'Huilier et K.F. Gauss.[7]

---

[6] Ce n'est pas la même chose en géométrie plane euclidienne : deux triangles isométriques, ayant leurs côtés respectifs égaux, ont des angle égaux, mais deux triangles ayant les mêmes angles sont seulement semblables.

[7] On trouvera sur internet une étude plus globale dans le remarquable article *Trigonométrie sphérique, pyreach.free.fr*, dont j'ai parfois ici repris certaines démonstrations.

7. Contraintes sur les longueurs des côtés et les angles d'un triangle sphérique

On a les propriétés suivantes :

Dans un triangle sphérique ABC, la somme des longueurs a, b, c des côtés est inférieure à 2π et la somme des angles α, β, γ est supérieure à π et inférieure à 3π.

$0 < a + b + c < 2\pi$

$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$

On a aussi les inégalités :

$|b - c| < a < b + c \qquad \alpha + \beta < \pi + \gamma$

$|c - a| < b < c + a \qquad \beta + \gamma < \pi + \alpha$

$|a - b| < c < a + b \qquad \alpha + \gamma < \pi + \beta$

Les triangles qui nous concernent ici sont considérés comme stricts, c'est-à-dire non aplatis, avec des côtés non nuls et des angles strictement compris entre 0 et π.

- La formule de Girard s'écrit $\alpha + \beta + \gamma = \pi + S$, d'où l'on déduit que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

- Avec les relations de dualité $a + \alpha' = \pi$, $b + \beta' = \pi$, $c + \gamma' = \pi$, et le fait d'avoir $\alpha' + \beta' + \gamma' > \pi$ dans le triangle dual, on en déduit $3\pi - a - b - c > \pi$, $a + b + c < 2\pi$.

- L'addtion des relations de dualité donne $a' + b' + c' + \alpha + \beta + \gamma = 3\pi$, d'où $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. Cela se vérifie concrétement. Un triangle sphérique est toujours strictement inscrit dans un hémisphère. Celui qui a la plus grande aire et la somme de ses angles la plus grande remplit presque un hémisphère. Prenons un point A quasiment sur l'équateur ainsi que deux points B et C sur l'équateur aussi, et très proches de A', le point aux antipodes de A. L'angle en A est quasiment π, et les angles en B et C sont légèrement inférieurs à π. Dans ce contexte maximal on a bien $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.

- On sait que $\sin b \sin c \cos \alpha = \cos a - \cos b \cos c$. Avec $-1 < \cos \alpha < 1$, cela donne :
  $-\sin b \sin c < \cos a - \cos b \cos c < \sin b \sin c$

$\cos(b + c) < \cos a < \cos (b - c)$

Si $b + c \leq \pi$, $a < b + c$ à cause de la décroissance du cosinus.
Si $b + c > \pi$, avec $a < \pi$, alors $a < b + c$.
Comme $| b - c | < \pi$ et $a < \pi$, on a aussi $|b - c| < a$.

- Appliquons l'inégalité précédente dans le triangle dual : $a' < b' + c'$. Avec les relations de dualité, cela devient : $\pi - \alpha < \pi - \beta + \pi - \gamma$, ou $\beta + \gamma < \pi + \alpha$.

Les propriétés ayant été démontrées, il reste à montrer la réciproque : Si l'on se donne 3 longueurs a, b, c non nulles avec $a + b + c < 2\pi$, $|b - c| < a < b + c$, $|c - a| < b < c + a$, $|a - b| < c < a + b$, alors il existe un triangle sphérique unique, à une isométrie près, ayant pour côtés a, b, c.

En effet utilisons $a + b + c < 2\pi$ et $|b - c| < a < b + c$.

Si $b - c \geq 0$, on a $b - c < a < b + c < 2\pi - a$, et si $b - c < 0$, $c - b < a$, et $-a < b - c$. Dans tous les cas, on a la chaîne d'inégalités $-a < b - c < a < b + c < 2\pi - a$.

Prenons $a < b + c < 2\pi - a$ en distinguant deux cas :

- Si $b - c$ est négatif, entre $-\pi$ et 0, avec $-a < 0$, on a $\cos(-a) < \cos(b - c)$, le cosinus étant croissant, et $\cos a < \cos(b - c)$.
- Si $b - c$ est positif ou nul, avec $a > 0$, on a $\cos(b - c) > \cos a$, le cosinus étant décroissant.

Dans tous les cas, $\cos a < \cos(b - c)$.

Prenons maintenant $a < b + c < 2\pi - a$, et distinguons deux cas :

- Si $b + c < \pi$, tout comme a, $\cos(b + c) < \cos a$.
- Si $b + c \geq \pi$, $\cos(b + c) < \cos(2\pi - a)$, ou $\cos(b + c) < \cos a$, comme auparavant.

Finalement, $\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c)$
$\cos b \cos c - \sin b \sin c < \cos a < \cos b \cos c + \sin b \sin c$
$-\sin b \sin c < \cos a - \cos b \cos c < \sin b \sin c$
$-1 < (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c) < 1$

Il existe un angle α unique avec $0 < \alpha < \pi$ tel que $\cos \alpha = (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c)$. A partir de cet angle en A, on peut construire les segments sphériques AB et AC de longueurs c et b, ce qui donne un triangle ABC unique, aux isométries près de la sphère. Remarquons que les contraintes $|c - a| < b < c + a$ et $|a - b| < c < a + b$ sont inutiles pour arriver au résultat.

De même, si l'on se donne trois angles α, β, γ avec $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ et $\alpha + \beta < \pi + \gamma$, $\beta + \gamma < \pi + \alpha$, $\alpha + \gamma < \pi + \beta$, alors il existe un triangle sphérique unique, à une isométrie près, ayant pour angles α, β, γ. Il suffit pour cela d'utiliser le résultat précédent sur le triangle dual.

Exercice : Triangle sphérique équilatéral

Un triangle équilatéral a par définition ses trois côtés de même longueur a. Il a aussi ses angles égaux, soit α.

1) Quelle est la longueur maximale des côtés, ainsi que celles des angles ?

La somme des longueurs des côtés devant être inférieure à 2π, cela fait $a < 2\pi/3$.
La somme des angles devant être inférieure à 3π, cela donne $\alpha < \pi$

2) Calculer l'angle α en fonction de la longueur a.

Appliquons la formule des cosinus :

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\cos a(1-\cos a)}{1-\cos^2 a} = \frac{\cos a(1-\cos a)}{(1-\cos a)(1+\cos a)}$$

$$= \frac{\cos a}{1+\cos a}$$

$\alpha = \mathrm{Arc}\cos\dfrac{\cos a}{1+\cos a}$ puisque α est entre 0 et π.

3) Montrer que α est une fonction croissante de a.

La dérivée est $d\alpha / da = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos a/(1+\cos a)}}\dfrac{-(1+\cos a)\sin a + \sin a \cos a}{(1+\cos a)^2} = \dfrac{\sqrt{1+\cos a}}{(1+\cos a)^2} > 0$.

La fonction est bien croissante. Pour $a = 0$, on a $\alpha = \pi/3$, et pour $a = 2\pi/3$, $\alpha = \pi$. L'angle α décrit l'intervalle $]\pi/3, \pi[$ lorsque a décrit $]0, 2\pi/3[$.

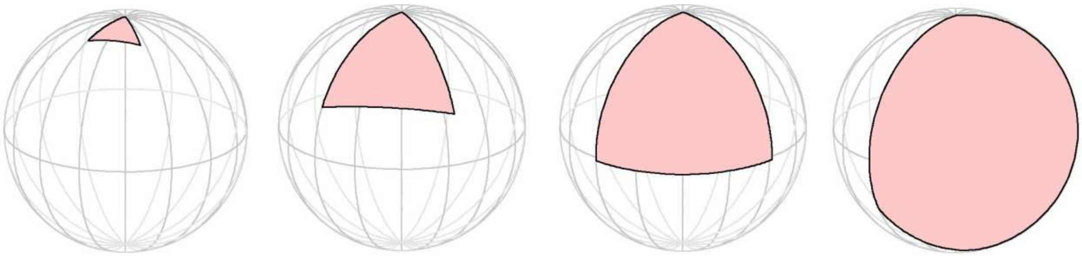


Figure 9 : Evolution du triangle équilatéral lorsque la longueur *a* de ses côtés augmente. *A gauche*, le triangle est proche du triangle équilatéral plan pour *a* proche de 0, *à droite* le triangle pour *a* proche de sa valeur maximale $2\pi/3$, avec des angles proches de π.

8. Groupe des isométries de la sphère

Par définition, une isométrie de la sphère est une transformation qui conserve les distances, ainsi que les angles non orientés. La composée d'isométries de la sphère est aussi une isométrie, l'inverse d'une isométrie est une isométrie, et les isométries ont une structure de groupe. Mais quelles sont ces isométries ?

Connaissant les isométries dans l'espace à trois dimensions, on vérifie aussitôt qu'une rotation dont l'axe passe par le centre *O* de la sphère est une isométrie directe de la sphère : elle conserve non seulement les distances sur la sphère mais aussi les angles orientés. On vérifie aussi qu'une réflexion par rapport à un plan passant par *O* est une isométrie indirecte, conservant les distances et transformant les angles en leurs opposés. Comme ce plan doupe la sphère suivant un grand cercle, nous pouvons parelr de réflexion autour d'un grand cercle. D'autre part, la composée de deux réflexions par rapport à deux plans sécants,, ce qui est toujours le cas ici puisqu'ils passent par *O*, est une rotation d'axe la droite d'intersection passant par *O* et d'angle le double de celui des deux plans entre eux.

8.1. Réflexion autour d'un grand cercle

Un grand cercle est caractérisé par un vecteur normal au plan qui le porte. Appelons N ce vecteur, supposé de longueur unité, ses extrémités étant si l'on veut le point *O* et un point sur la sphère. La réflexion autour de ce grand cercle fait passer d'un point *M* à un point *M*' sur la sphère. Appelons *H* le point d'intersection de (*MM*') avec le plan de réflexion. Ce point est le projeté de *M* sur le plan du grand cercle et c'est aussi le milieu de [*MM*'], d'où **OM** + **OM'** = 2 **OH**. D'autre part, avec (*MH*) parallèle à **N**, prenons le produit scalaire **OM** . **N** = $\overline{HM}$, d'où **HM** = $\overline{HM}$ **N** =(**OM . N**) **N**, et **OH** = **OM** + **MH**. Finalement,

OM' = 2 (**OM** + (**OM . N**) **N**) – **OM**
OM' = **OM** – 2 (**OM** . **N**) N
Cette formule permet de construire le point *M'* à partir de *M*.

L'arc *MM*' coupe le grand cercle en *H'*, et *H'* est le milieu de l'arc *MM'* tout comme *H* est le milieu du segment [*MM'*]. Comme l'arc *MM'* est aussi perpendiculaire en *H*'au grand cercle, celui-ci joue le rôle de *médiatrice* pour l'arc *MM'* (*figure 10*).

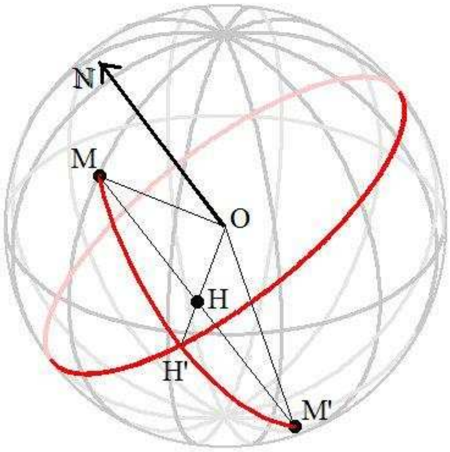


Figure 10 : L'arc *MM'* et sa médiatrice qui est le grand cercle passant par le milieu *H'*.

8.2. Rotation d'axe passant par *O* et d'angle φ

La rotation est définie par le vecteur unité **N** (a, b, c) sur l'axe et par l'angle φ. Une méthode consiste à utiliser la matrice de rotation P telle que[8] :

$$P = (1-\cos\varphi)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} + \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

On passe alors de M (x, y, z) à M' (x', y', z') par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

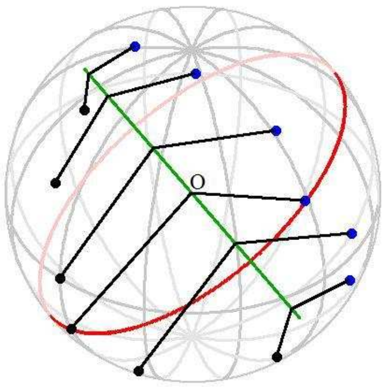


Figure 11 : Sous l'effet de la rotation dont l'axe est *en vert*, et l'angle 100°, des points (*en noir*) sont transformés en points (*en bleu*). Le mouvement d'un point à son transformé se fait suivant un arc de petit cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sauf dans le cas où ce plan passe par *O*, ce qui donne un arc de grand cercle (*en rouge*).

[8] Pour la démonstration de cette formule, voir *Rotation en trois dimensions*, dans *graphisme et géom*érie, rubrique *travaux complémentaires*, sur mon site.

8.3. Le groupe des isométries de la sphère

Nous allons maintenant montrer les propriétés suivantes :

Il existe une isométrie unique de la sphère faisant passer de trois points *ABC* non alignés à trois points *A'B'C'* non alignés.

Toute isométrie de la sphère est la composée d'au plus trois réflexions par rapport à des plans passant par *O*, c'est-à-dire par rapport à des grands cercles de la sphère.

Toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation, soit la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Prenons trois points non alignés *A*, *B*, *C* : ils ne sont pas sur un même grand cercle.Tout point *M* sur la sphère est alors caractérisé par ses trois distances aux points *A*, *B*, *C*. En effet, s'il existait un autre point *Q* ayant ces mêmes trois distances, on aurait $MA = QA$, $MB = QB$ et $MC = QC$. Cela signifierait que *A*, *B* et *C* seraient tous trois sur la médiatrice sphérique de l'arc *MQ*. Les points seraient alignés, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Sous l'effet d'une isométrie envoyant *A*, *B*, *C* en *A*', *B*', *C*', un point quelconque *M* de la sphère est envoyé en *M*'. Or le point *M* est caractérisé par les trois distances *MA*, MB, *MC*. L'isométrie conservant les distances, le point *M*' est aussi caractérisé par les mêmes trois distances aux points *A*', *B*', *C*', et comme les points *A*', *B*', *C*' sont non alignés, le point *M'* est unique. L'isométrie est bien unique.

Nous allons maintenant construire cette isométrie, ce qui montrera par la même occasion que cette isométrie existe. Pour cela, prenons deux triangles sphériques isométriques *ABC* et *A*'*B*'*C*' sur la sphère unité. Et plaçons-nous dans le cas le plus général, celui est *A* n'est pas confondu avec *A*', ni *B* avec *B*', ni *C* avec *C*' (*figure 12 en haut*). Comment passer d'un triangle à l'autre ?

Commençons par faire la réflexion qui envoie *A* en *A*', autour du grand cercle dont un vecteur normal est **AA'**. On obtient le triangle $A'B_1C_1$. Si B_1 et C_1 sont confondus avec *B*' et *C*' c'est fini. Sinon, faisons une nouvelle réflexion qui envoie B_1 en *B*', autour du grand cercle d'axe $\mathbf{B_1B'}$. Ce grand cercle passe par *A'* puisque ce point est à égale distance de B_1 et *B*', et le point *A*' reste invariant. On obtient le nouveau triangle $A'B'C_2$. Si C_2 est confondu avec *C*', c'est fini, les deux triangles *ABC* et *A*'*B*'*C*' étant de sens direct l'un par rapport à l'autre, et l'on est passé de l'un à l'autre par la rotation qui est le produit des deux réflexions. Sinon, on fait une troisième réflexion autour du grand cercle passant par *A*' et *B*' et d'axe $\mathbf{C_2C'}$. On trouve ainsi le triangle *A*'*B*'*C*' (*figure 12 en bas*).

Dans les cas particulier où deux points sont confondus, comme par exemple *A* et *A*', on fait de même mais en évitant une des réflexions.

Finalement tout isométrie est la composée d'au plus trois réflexions. Et comme deux réflexions successives donnent une rotation, toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation, soit la composée d'une rotation et d'une réflexion.

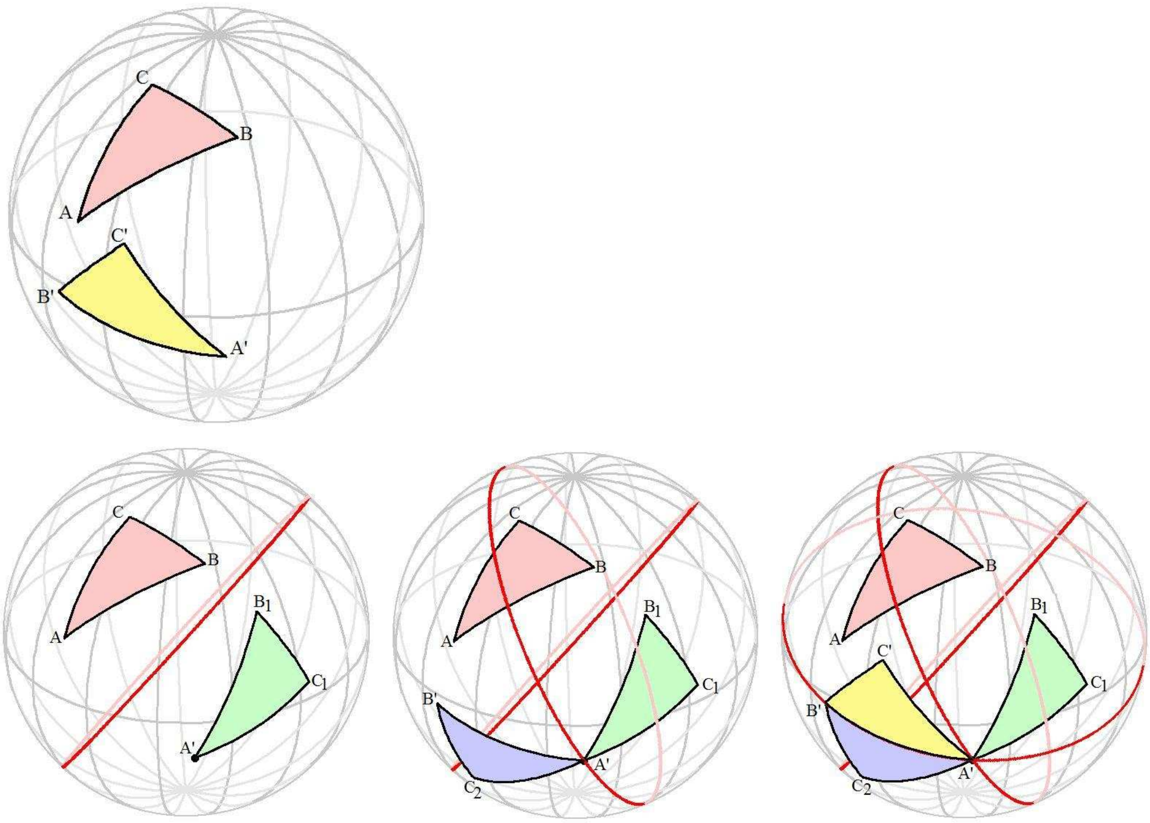


Figure 12 : *En haut*, deux triangles isométriques (de sens indirect l'un par rapport à l'autre) sur la sphère, *en bas* le passage progressif de l'un à l'autre par le biais de trois réflexions autour de grands cercles.