

Nombres brésiliens

Définition

Un nombre entier naturel n est dit brésilien¹ s'il existe une base b dans laquelle il s'écrit avec toujours le même chiffre répété plusieurs fois, au moins deux, cette base devant être inférieure à $n - 1$: $b < n - 1$ (et supérieure à 1, évidemment).

Pourquoi imposer cette contrainte $b < n - 1$? Parce que si b était égal à $n - 1$, on pourrait toujours écrire $n = (n - 1) + 1 = \underline{11}_{n-1}$, et tous les nombres pourraient s'écrire avec le même chiffre 1 répété deux fois. Et si b était égal à n , l'écriture du nombre en base b serait $\underline{10}$. Avec une base au-delà de n , le nombre n s'écrirait avec le seul chiffre n . Tous ces cas n'ont donc aucun intérêt.

Exemples

$7 = \underline{111}_2$ est un nombre brésilien.

$62 = \underline{222}_5$ est un nombre brésilien.

$85 = \underline{1111}_4$ est un nombre brésilien.

11 n'est pas un nombre brésilien. En effet, on doit exclure la base 10, puisque $b < 10$, et lorsqu'on essaye les bases possibles à partir de 2 et jusqu'à 9, on ne tombe jamais sur une écriture où le même chiffre se trouve répété. Ainsi $11 = \underline{1011}_2 = \underline{102}_3 = \underline{23}_4 = \underline{21}_5 = \underline{15}_6 = \underline{14}_7 = \underline{13}_8 = \underline{12}_9$.

1) Quel est le plus petit nombre brésilien ?

On a vu que 7 était un nombre brésilien. Prenons maintenant les nombres qui le précèdent. De 1 à 3, la base b serait trop petite. Puis $4 = \underline{100}_2$ et c'est la seule base possible. $5 = \underline{101}_2 = \underline{12}_3$ ($b < 4$). $6 = \underline{110}_2 = \underline{20}_3 = \underline{12}_4$. Aucun de ces nombres n'est brésilien. Le plus petit est donc 7.

2) Faire le programme permettant de savoir si un nombre est brésilien ou non

Le nombre étant donné, on l'écrit en base b à partir de la base 2 et jusqu'à la base $nombre - 2$. Cette écriture se fait par des divisions successives par b , jusqu'à ce que le quotient soit nul. Les restes successifs donnent les chiffres de l'écriture en base b suivant les puissances croissantes de b , et non pas décroissantes comme lorsqu'on écrit le nombre habituellement. Dans le cas présent, dès qu'un reste est différent de celui qui le précède, on est assuré de ne pas avoir un nombre brésilien. Par contre si tous les restes sont identiques, du premier au dernier, le nombre est brésilien. On ajoute un *compteur* qui permet de savoir dans combien de bases le nombre est brésilien.

```
nombre=341; bresilien=0; compteur=0; /* l'exemple du nombre 341 */
for(base=2;base<nombre-1;base++)
{ q= nombre; k=0; flag=0;
  while(q!=0)
  { r[k]=q%base; q=q/base;
    if (k>0 && r[k]!=r[k-1]) { flag=1; break;}
    k++;
  }
  if (flag==0)
  { compteur++; bresilien=1;
    printf("\n base=%d ",base);
    for(i=0;i<k;i++) printf("%d ",r[i]);
  }
}
```

¹ En 1994, lors des Olympiades mathématiques d'Amérique latine qui se déroulèrent à Fortaleza au Brésil, un exercice proposé par le Mexique fit référence à de tels nombres. D'où leur dénomination de nombres brésiliens.

```

}
if (bresilien==1) printf("\n Le nombre %d est bresilien de %d facons\n",nombre,compteur);
else printf("\n Le nombre %d n'est pas bresilien \n",nombre);

```

3) *Constater expérimentalement que les nombres pairs pris entre 8 et 100000 sont tous brésiliens. Démontrer qu'il en est toujours ainsi.*

Il suffit d'aménager légèrement le programme précédent pour constater ce résultat. Mais pourquoi en est-il toujours ainsi, à partir de $n = 8$? On sait déjà que 2, 4, 6 ne sont pas brésiliens. Aussi démarre-t-on avec $n = 8$. Tout nombre pair à partir de 8 s'écrit $n = 2k$ avec $k \geq 4$, soit $n = 2(k-1) + 2 = \underline{22}_{k-1}$. On obtient bien un nombre brésilien, avec une base au moins égale à 3.

4) *Montrer que les nombres composites impairs qui se factorisent sous la forme $n = k k'$, avec $k' \geq 3$, et $k > k'$ (k et k' étant nécessairement impairs tous les deux), sont tous brésiliens.*

Le premier nombre impair de cette forme est $n = 15 = 5 \times 3$, les nombres impairs précédents, à partir de 7 ne l'étant pas, puisqu'ils sont des nombres premiers (7, 11, 13) ou un carré de nombres premiers (9). Pour $n = 15$, on a $n = 5 \times 3 = 4 \times 3 + 3 = \underline{33}_4$. Le nombre 15 est brésilien.

Cela se généralise : $n = k k' = (k-1)k' + k' = \underline{k'k'}_{k-1}$, la base étant au moins égale à 4, puisque $k \geq 5$.

5) *Montrer la propriété suivante : Si un nombre n , au-delà de 7, n'est pas brésilien, alors n est soit un nombre premier soit le carré d'un nombre premier.²*

Laissons de côté les nombres inférieurs à 7 dont on sait qu'ils ne sont pas brésiliens, et 7 qui est brésilien. Les nombres $n > 7$ se divisent en plusieurs catégories distinctes :

- 1) pairs
- 2) impairs
 - a) premiers impairs
 - b) de la forme kk' avec $k > k'$, donc non premier impair. Ce cas $n = k k'$ englobe aussi les carrés de nombres non premiers impairs, comme $15^2 = 3 \times 75$.
 - c) carré d'un nombre premier impair.

On a vu que les nombres des catégories 1) et 2b) sont tous brésiliens. Restent les autres. Parmi les nombres premiers impairs de la catégorie 1a), certains comme $13 = \underline{111}_3$ ou $31 = \underline{11111}_2 = \underline{111}_5$ sont brésiliens et d'autres comme 11, 17 ou 19 ne le sont pas. Parmi les carrés de nombres premiers impairs de la catégorie 1c), certains comme $121 = 11^2 = \underline{11111}_3$ sont brésiliens, et d'autres comme 9, 25 ou 49 ne le sont pas. On en déduit la propriété précédente. Au-delà de 7, les seuls nombres qui peuvent prétendre être non brésiliens sont ceux qui sont des nombres premiers impairs, ou des carrés de nombres premiers impairs.

6) *Quel est le plus petit nombre brésilien qui s'écrit comme tel, avec un même chiffre répété, dans plus de 20 bases ? Et dans plus de 30 bases ?*

On trouve, en aménageant légèrement le programme précédent que

- 45 045 s'écrit de 23 façons différentes, et que c'est le premier au-delà de 20 façons.
- 135 135 s'écrit de 31 façons différentes, et c'est le premier au-delà de 30 façons.

On peut aussi vérifier que

² Cette propriété est démontrée par B. Schott, ainsi que d'autres, dans les *nombres brésiliens*, revue Quadrature, n° 76, avril-mai 2010.

- les nombres premiers non brésiliens sont beaucoup plus nombreux que les nombres premiers brésiliens,
- les nombres premiers non brésiliens dont le carré est aussi non brésilien sont beaucoup plus courants que les nombres premiers brésiliens à carré non brésilien.

Nous avons trouvé un seul nombre premier, 11, qui soit non brésilien alors que son carré 121 est brésilien. Il ne semble pas exister de nombre premier brésilien à carré brésilien.