Solides de Platon, solides d'Archimède, solides de Catalan

Nous commençons par traiter complètement le cas du tétraèdre régulier, un des cinq solides de Platon, puis le tétraèdre tronqué qui est un solide d'Archimède, et enfin le polyèdre dual, qui est un solide de Catalan. Puis nous généraliserons cela à la globalité de ces trois types de polyèdres.

1. Rappels sur le tétraèdre régulier

Par définition, le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, avec quatre triangles comme faces, et quatre sommets. Il est régulier si ces quatre triangles sont équilatéraux. Ils sont aussi isométriques. Appelons *a* la longueur d'une des 6 arêtes du tétraèdre régulier *ABCD*. Nous allons démontrer certaines de ses propriétés.

1.1. Le sommet *A* se projette orthogonalement en *H* sur le plan *BCD*, le point *H* étant le centre de gravité de *BCD*.

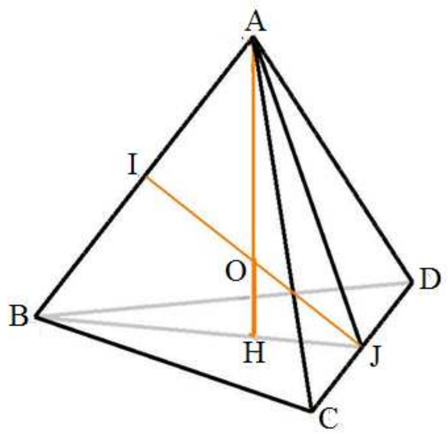


Figure 1 : Le téraèdre régulier, avec son centre *O* et le plan médiateur *ABJ*

Le point *A* est équidistant des points *B*, *C*, *D*. Il est sur l'axe du cercle circonscrit à *BCD*. Il passe aussi par le centre de ce cercle, qui est le centre de gravité du triangle équilatéral *BCD*. Cet axe étant orthogonal au plan *BCD*, le point *A* se projette bien en *H*, centre de *BCD* (*figure 1*).

1.2. Les arêtes opposées deux à deux de *ABCD* sont perpendiculaires.

Appelons *J* le milieu de [*CD*]. Dans les triangles équilatéraux *BCD* et *ACD*, les médianes [*BJ*] et [*AJ*] sont aussi hauteurs. La droite (*CD*) est perpendiculaire en *J* à (*BJ*) et (*AJ*), elle est perpendiculaire au plan *ABJ*. Comme [*AB*] est dans ce plan, on a aussi [*AB*] perpendiculaire à [*CD*]. Ces deux côtés opposés sont perpendiculaires, et il en est de même des autres.

Remarquons que le point *H* est situé aux deux-tiers de [*BJ*] à partir de *B*. Le plan *ABJ* qui contient (*AH*) perpendiculaire à *BCD* est perpendiculaire au plan *BCD*. Il est aussi le plan médiateur de [*CD*].

1.3. Le téraèdre *ABCD* admet une sphère circonscrite dont le centre *O* est aux trois-quarts de [*AH*] à partir de *A*.

Appelons O l'isobarycentre des points A, B, C, D. Grâce à la règle du barycentre partiel, avec H isobarycentre de B, C, D, le point O est aussi le barycentre de (O, 1) et (H, 3). Il est donc situé aux trois quarts de [AH] à partir de A. Comme il est situé sur l'axe (AH) du cercle circonscrit à BCD, on a aussi $OB = OC = OD$. Ce que l'on a fait en privilégiant la base BCD peut être fait avec une autre face du tétraèdre. Finalement $OA = OB = OC = OD$, et O est le centre de la sphère circonscrite à $ABCD$.

1.4. Le centre O de la sphère circonscrite à ABCD a pour rayon $R = a\sqrt{6}/4$. Il est aussi le centre de la sphère inscrite de rayon $r = a\sqrt{6}/12$, et aussi le centre de la sphère intermédiaire tangente aux arêtes du tétraèdre, de rayon $R_\mathrm{i} = a/(2\sqrt{2})$.

Avec [BJ] hauteur du triangle équilatéral ABJ, $BJ = a\sqrt{3}/2$. On en déduit $BH = (2/3)a\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}/3$. Dans le triangle rectangle AHB, $AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - a^2/3 = 2\,a^2/3$, d'où $AH = a\sqrt{2}/\sqrt{3}$, et $AO = (3/4)a\sqrt{2}/\sqrt{3} = a\sqrt{6}/4$, soit $R = a\sqrt{6}/4$.

Tout comme A qui se projette au centre de la face BCD, avec O aux trois-quarts de la hauteur [AH] du tétraèdre, il en est de même avec les autres hauteurs pour l'isobarycentre O, et les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes en O, avec O situé aux trois-quarts des 4 hauteurs à partir des sommets. Par le même calcul que celui fait pour avoir AH, les autres hauteurs ont la même longueur. On a aussi $OH = (1/4)\,AH = (1/4)a\sqrt{2}/\sqrt{3} = a\sqrt{6}/12$, avec [$OH$] perpendiculaire en H au plan BCD. Il en est de même avec les autres faces, O est équidistant des quatre plans des faces, il est le centre d'une sphère tangente aux quatre faces, c'est le centre de la sphère inscrite de rayon $r = a\sqrt{6}/12$.

Reprenons l'isobarycentre O de $ABCD$. Toujours grâce à la règle du barycentre partiel, en prenant J barycentre de (C, 1) et (D, 1) ainsi que I milieu de [AB] et barycentre de (A, 1), (B, 1), O est aussi le barycentre de (J, 2) et (I, 2), soit le milieu de [IJ]. Il est aussi le milieu des autres segments joignant les milieux des arêtes opposées, donc équidistant des quatre milieux. Le triangle ABJ est isocèle en J, la médiane [JI] est aussi hauteur, et [IJ] est perpendiculaire à l'arête [AB]. Dans le triangle rectangle OAI, $OI^2 = OA^2 - AI^2 = 3\,a^2/8 - a^2/4 = a^2/8$, soit $OI = a/(2\sqrt{2})$. La sphère de centre O et de rayon $a/(2\sqrt{2})$ passe par les quatre milieux des arêtes de $ABCD$, avec ces arêtes situées dans les plans tangents à la sphère en ces milieux. Le point O est le centre de la sphère intermédiaire qui a pour rayon $R_\mathrm{i} = a/(2\sqrt{2})$ (*figure 2*).

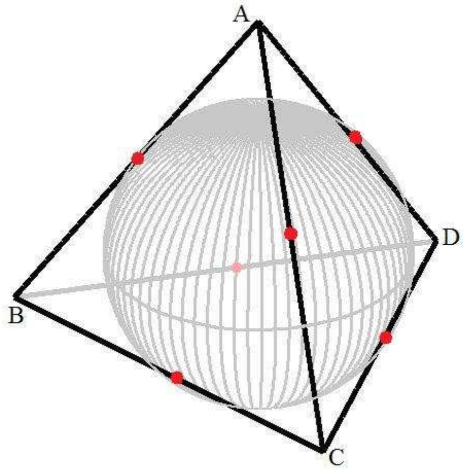


Figure 2 : La sphère intermédiaire, tangente aux arêtes en leur milieu (*en rouge*).

1.5. Les plans de deux faces ayant une arête en commun font un angle α dont le cosinus vaut 1/3.

L'angle dièdre α formé par les demi-plans *BCD* et *ACD* délimités par l'arête (*CD*) est situé dans le plan perpendiculaire à (*CD*), ici *ABJ*, et il est délimité par les deux demi-droites d'intersection. Il s'agit de l'angle *AJB* (*figure 1*).

Dans le triangle rectangle *AJI* : $JI^2 = AJ^2 - AI^2 = 3a^2 / 4 - a^2 /4 = a^2 /2$, $JI = a / \sqrt{2}$. Comme (*JI*) est aussi bissectrice de *AJB*, $\cos(\alpha/2) = JI / JA = (a / \sqrt{2}) / (a\sqrt{3} / 2) = \sqrt{2} / \sqrt{3}$.

$\cos \alpha = 2 \cos^2 (\alpha/2) - 1 = 1 / 3$

$\alpha \approx 70{,}5°$.

Il en est de même pour toutes les faces adjacentes du tétraèdre.

1.6. Symétries du tétraèdre régulier

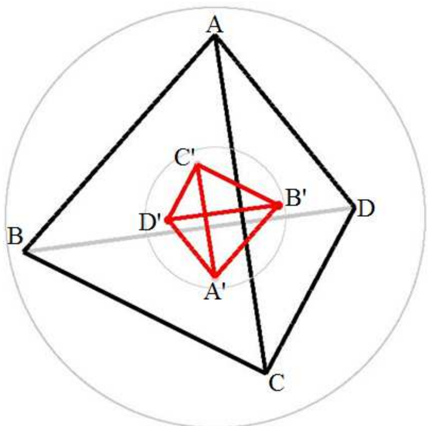
Faisons une rotation *R* d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe (*AH*). Elle laisse le tétraèdre globalement invariant. Il en est de même avec une rotation *R'* d'angle $4\pi/3$ autour du même axe. Il existe aussi des rotations autour des axes issus de *B*, *C* et *D*. Cela fait déjà 8 rotations. Il existe aussi des demi-tours autour des axes joignant les milieux d'arêtes opposées, soit 3 rotations. En ajoutant l'identité *Id* qui laisse le tétraèdre tel quel, on vient de trouver 12 rotations qui font se spuperposer le tétraèdre sur lui-même. Encore convient-il de montrer qu'il n'en eixste pas d'autres.

Pour cela, reprenons les rotations *R* et *R'* autour de (*AH*). Ce sont les seules laissant *A* fixe. Puis prenons une rotation T_1 faisant passer de *A* à *B*, une rotation T_2 faisant passer de *A* à *C*, et une rotation T_3 faisant passer de *A* à *D*. En composant *R* avec T_1, T_2 et T_3 ainsi que *R*', on obtient ainsi 9 nouvelles rotations $T_i\, R$ ou $T_i\, R'$ (*i* de 1 à 3), qui sont différentes puisque *A* n'est pas envoyé au même point selon les cas. En ajoutant l'identité, cela fait 12 rotations toutes différentes. Supposons qu'il y en ait une autre, *r*, envoyant par exemple *A* en *B*. En faisant $T_1^{-1}\, r$, cette rotation envoie *A* en *A*. Il ne peut s'agit que de *R* (ou *R*'), et $r = T_1\, R$, que l'on a déjà recensée. Il n'existe que 12 rotations qui font coincider le tétraèdre avec lui-même, autrement dit 12 isométries positives.

Il existe aussi des isométries négatives, comme les réflexions par rapport à un plan médiateur comme *ABJ*. En composant une de ces réflexions avec les 12 rotations, on trouve 12 isométries négatives différentes.

Finalement, le tétraèdre régulier admet 24 isométries qui le laissent invariant, et positives pour moitié. On les appelle les symétries du tétraèdre. C'est aussi le nombre de permutations de 4 objets. Le groupe de permutations S_4 de 4 éléments est aussi le groupe de symétries du tétraèdre régulier.

1.7. Le tétraèdre régulier est auto-dual, autrement dit il admet comme dual un tétraèdre régulier.



Il suffit de joindre les centres de gravité des 4 faces de *ABCD* pour obtenir un nouveau tétraèdre régulier *A'B'C'D'*. On constate que ce polyèdre dual a comme sphère circonscrite la sphère inscrite de *ABCD*.

Figure 3 : Le tétraèdre régulier *ABCD* et son dual *A'B'C'D'*.

La notion de dualité devra être précisée et généralisée si on veut l'appliquer à des formes plus complexes que celles du tétraèdre régulier. On sait que le graphe dual d'un graphe planaire consiste à remplacer les faces du graphe initial par un point en leur intérieur qui devient un sommet du dual, et à joindre deux sommets par une arête s'ils correspondent à deux faces adjacentes du graphe initial. C'est aussi ce que l'on fait pour avoir le dual du tétraèdre régulier, en prenant comme sommets les centres de ces faces. Ces centres sont les projections du centre de la sphère sur les faces. Il en sera de même pour les polyèdres plus complexes que nous allons étudier.

2. Dualité polaire par rapport à une sphère

Considérons une sphère de centre O et de rayon R. En appelant E un ensemble qui peut être un point, une droite ou un plan, son dual polaire par rapport à la sphère est l'ensemble E^* formé des points M' tels que pour tout point M de E, on ait le produit scalaire **OM OM'** = R^2. Les points M et M' étant interchangeables, il s'ensuit que si $E \rightarrow E^*$ par dualité polaire par rapport à une sphère, on a aussi $E^* \rightarrow E$. E et E^* sont des espaces duaux : $E \leftrightarrow E^*$.

2.1. Dual d'un point *A* autre que *O*

OA OM' = R^2 s'écrit aussi $\overline{OA}\,\overline{OH} = R^2$ avec H projection de M' sur (OA). Le point H est fixe, les points M' décrivent le plan perpendicualaire en H à (OA). Les points A et H sont inverses par rapport à la sphère, ce qui permet de les construire en utilisant les tangentes à la sphère, avec $OA\ OH = OT^2$ (*figure 4*). Lorsque le point A est extérieur à la sphère, le plan P coupe la sphère suivant un cercle (de diamètre TT'), et le cône de sommet A ayant pour base ce cercle est tangent à la sphère.

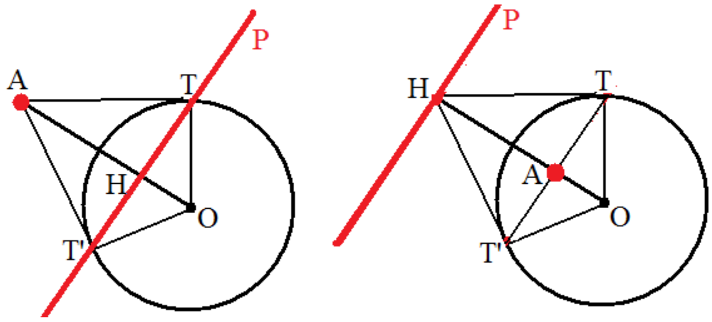


Figure 4 : Un point A et son dual le plan P, dans les deux cas de figure où les points A et H s'échangent.

2.2. Dual d'un plan *P* ne passant pas par *O*

Le dual d'un point étant un plan, il est logique que le dual d'un plan soit un point. Avec M dans P, on obtient M' tel que **OM OM'** = R^2, ce qui s'écrit aussi $\overline{OH}\,\overline{OM'} = R^2$ avec H pied de la perpendiculaire au plan issue de O. Le point M' est fixe, et c'est le point A que l'on avait obtenu précédemment, la construction étant la même : $P \leftrightarrow A$.

Comment avoir le point A par le calcul, en supposant que le plan P est défini par trois points T, U, V ? On calcule d'abord le produit vectoriel **W** = **TU** $\wedge$ **TV**, ce vecteur étant orthogonal au plan P, et sa longueur étant L. Le vecteur **W** / L a une longueur 1. D'autre part, $OA = R^2 / OH = R^2 / (OT \cos\theta)$ où θ est l'angle TOH. Finalement, **OA** = **W** $R^2 / (L\ OT \cos\theta)$, soit

$$\mathbf{OA} = \frac{R^2}{(\mathbf{W}.\mathbf{OT})}\mathbf{W}$$

2.3. Dual d'une droite

Nous allons montrer que le dual d'une droite (AB) est la droite telle que $(AB)^* = A^* \cap B^*$.

Le point A a pour transformé le plan perpendiculaire en A' à (OA). De même le point B a pour transformé le plan perpendiculaire en B' à (OB). Ces deux plans se coupent suivant une droite D perpendiculaire au plan AOB, soit $D = A^* \cap B^*$. Prenons maintenant un point quelconque G sur (AB) (*figure 5*). La sphère coupe le plan AOB suivant un grand cercle de rayon R. On sait que par l'inversion autour de ce cercle, la droite (AB) est transformée en un cercle passant par O, ainsi que par A' et B', les inverses de A et B. Le point G est transformé par dualité en un plan perpendiculaire en G' à (OG). Ce plan contient aussi la droite D à cause de l'angle droit en G' dans le plan AOB. Donc $(AB)^* = D$, et $(AB)^* = A^* \cap B^*$. On constate aussi que la droite duale de la droite (AB) est une droite perpendiculaire au plan OAB.

Dans le cas particulier où la droite (AB) est tangente à la sphère en un point I, la droite duale est non seulement perpendiculaire à (AB) et au plan OAB, mais elle passe aussi par I. En effet, lorsqu'un point M décrit la droite (AB), le plan dual (P) est perpendiculaire à (OM) en un point M' qui est l'inverse de M par rapport à un grand cercle de la sphère, et l'on sait que l'inverse de la droite (AB) est le cercle de diamètre [OI]. Le plan (P) passe par I et la droite duale est perpendiculaire en I au plan OAB.

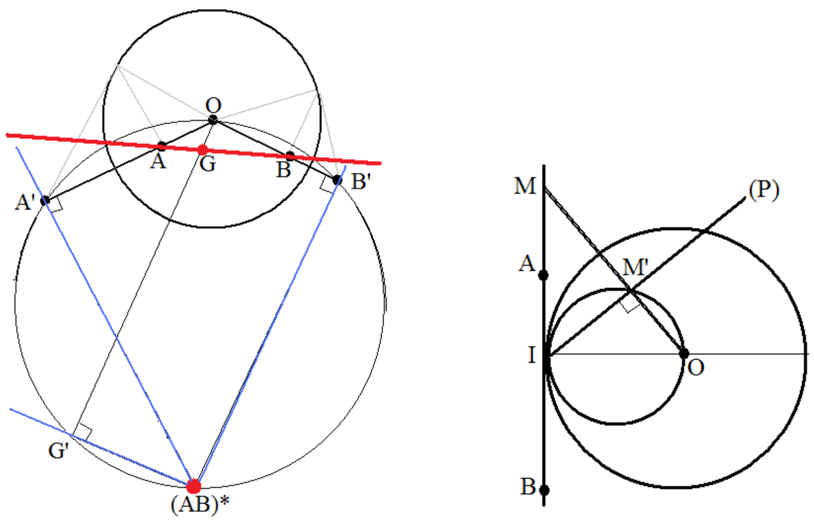


Figure 5 : Vue de haut du plan OAB. *A droite*, on est dans le cas particulier où la droite (AB) est tangente à la sphère.

3. Dual du tétraèdre régulier

Prenons la sphère intermédiaire (tangente aux arêtes) comme sphère de la dualité polaire. On sait déjà que les perpendiculaires aux faces menées à partir du point O coupent ces faces en leurs centres de gravité, notés A_1, B_1, C_1, D_1. Les faces ont pour points duaux les points A', B', C', D'. Par exemple D' est le dual du plan ABC, avec D' sur [AD_1), tel que $OD_1\ OD' = R_i^2 = a^2 / 8$, avec $OD_1 = a\sqrt{6}/12$ (rayon du cercle inscrit à $ABCD$), d'où $OD' = a\sqrt{6}/4$. Ainsi D' est sur le cercle circonscrit à $ABCD$. Il en est de même avec les points A', B', C'. On a aussi $OD' = 3\ OD_1$ et $OC' = 3\ OC_1$, d'où l'on déduit que $C'D' = 3\ C_1D_1$. Or C_1 et D_1 sont les transformés des milieux de [BD] et [BC] par l'homothétie de centre A et de rapport 2/3. La jonction entre deux milieux étant de longueur a /2, on en déduit que $C_1D_1 = a/3$, puis $C'D' = a$.

Les côtés du tétraèdre dual *A'B'C'D'* ont la même longueur que ceux de *ABCD*. *A'B'C'D'* est aussi un tétraèdre régulier, et il est isométrique avec *ABCD*. C'est là un des avantages d'avoir choisi la sphère intermédiaire.[1]

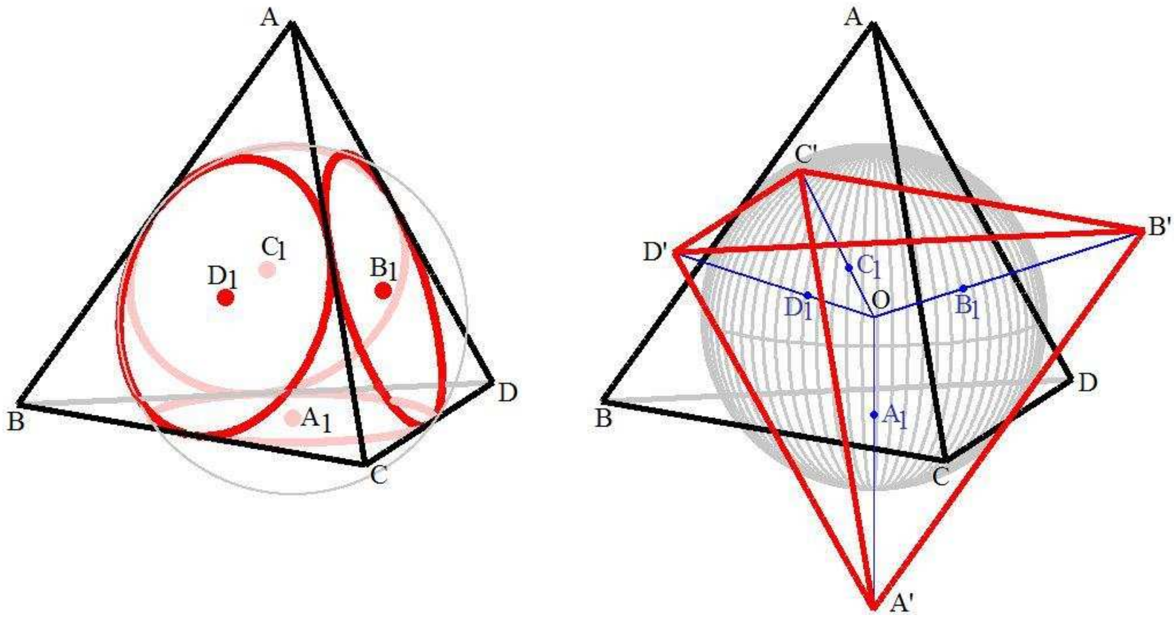


Figure 6 : *A gauche*, les cercles d'intersection de la sphère intermédiaire avec les quatre faces du tétraèdre régulier. *A droite*, le tétraèdre dual *A'B'C'D'*, isométrique avec *ABCD*.

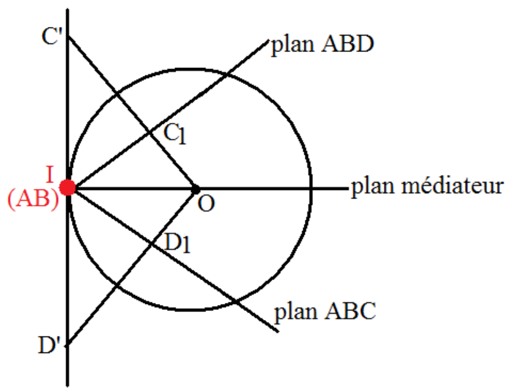


Figure 7 : Vue de haut, avec *I* milieu de [*AB*] qui est aussi le milieu de [*C'D'*].

En se plaçant à la verticale du plan OIC_1D_1, avec la droite (*AB*) vue sous forme d'un point (*figure 7*), on constate que *I* milieu de [*AB*] est aussi le milieu de [*C'D'*]. Les tétraèdres duaux ont les milieux de leurs arêtes en commun.

Mieux encore, le tétraèdre et son dual sont non seulement isométriques, mais plus précisément symétriques par rapport au point *O*. En effet, on a par exemple $\mathbf{OA_1} = -\mathbf{OA}/3$ ou $\mathbf{OA} = -3\,\mathbf{OA_1}$, et $\mathbf{OA'} = (R_i^2 / OA_1)\,\mathbf{OA_1} / OA_1 = (R_i^2 / OA_1^2)\,\mathbf{OA_1} = 3\,\mathbf{OA_1}$, d'où $\mathbf{OA'} = -\mathbf{OA}$.

[1] Si l'on avait pris comme sphère de la dualité polaire la sphère inscrite dans *ABCD*, on obtiendrait le dual $A_1B_1C_1D_1$, comme sur la *figure 3* où il est appelé *A'B'C'D'*. Pour les cinq polyèdres réguliers, leur dual est obtenu en prenant les centres des faces et en pratiquant la dualité par rapport à l'une quelconque des sphères, soit circonscrite, soit inscrite, soit intermédiaire. Le résultat est le même, à une homothétie près.

4. Le tétraèdre tronqué

4.1. Construction et caractéristiques du tétraèdre tronqué

A partir du tétraèdre régulier, plaçons sur chacune de ses arêtes des points disposés au tiers et aux deux-tiers de chacune d'elles, qui vont être les sommets d'un nouveau polyèdre à 12 sommets. Cela revient à dire que l'on rogne les pointes du tétraèdre régulier sur un tiers de leur longueur, ce qui donne un nouveau polyèdre, appelé tétraèdre tronqué (*figure 8*).

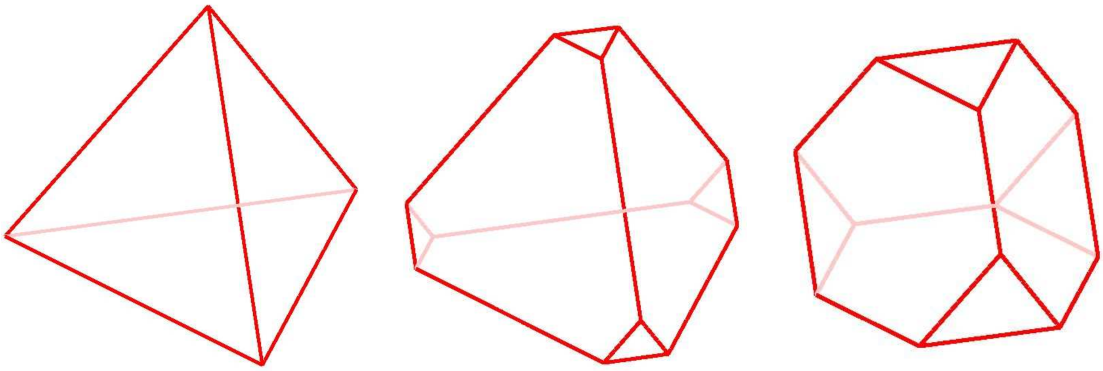


Figure 8 : Du tétraèdre régulier *à gauche* au tétraèdre tronqué *à droite*, avec une étape intermédiaire lorsque l'on rogne les pointes. Le tétraèdre tronqué a des arêtes de longueur *a'* trois fois plus petite que celle *a* du tétraèdre régulier.

Tel qu'il est construit, le tétraèdre tronqué a toutes ses 18 arêtes de même longueur *a'* avec $a' = a / 3$, où *a* était la longueur des arêtes du tétraèdre régulier. Il possède 8 faces dont quatre sont des triangles équilatéraux, et les quatre autres des hexagones réguliers (puisqu'ils ont des côtés de même longueur et des angles égaux à 120°). Chaque sommet est de degré 3, avec deux hexagones et un triangle qui l'entoure.

4.2. Sphère circonscrite et sphère intermédiaire

Le tétraèdre tronqué n'a pas de sphère inscrite. Il en existe une pour les faces hexagonales, et une autre pour les faces triangulaires. Mais il admet une sphère circonscrite, de centre *O*, pour des raisons assez évidentes lorsque l'on tronque de façon identique le tétraèdre régulier. On peut le vérifier en constatant que le point *O* est équidistant des sommets d'une face hexagonale, et il en sera de même pour les autres. En effet, une face hexagonale du tétraèdre tronqué a le même centre que la face triangulaire correspondante du tétraèdre régulier, comme D_1 dans *ABC* (*figure 9*).

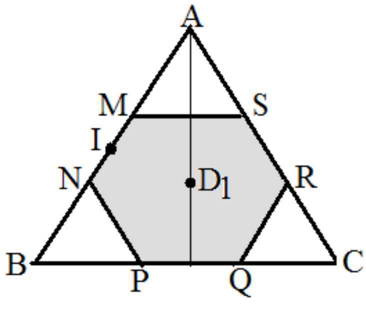


Figure 9 : une face *ABC* du tétraèdre *ABCD* et une face hexagonale du tétraèdre tronqué.

On sait que (OD_1) est perpendiculaire au plan de la face *ABC*. Le point *O* est équidistant des points *A*, *B*, *C*, à la distance *R*, et il est aussi équidistant des six sommets de l'hexagone régulier concerné *MNPQRS*, à une distance *R'*, rayon du cercle circonscrit au tétraèdre tronqué. On sait aussi que $OD_1 = r$, rayon de la sphère inscrite au tétraèdre *ABCD*, et qui est aussi le rayon de la sphère inscrite pour les hexagones du tétraèdre tronqué. Ainsi $OD_1 = a\sqrt{6}/12 = a'\sqrt{6}/4$. Par le théorème de Pythagore dans OD_1M, $R'^2 = OD_1^2 + D_1M^2 = 3\,a'^2/8 + a'^2 = 11\,a'^2/8$, d'où $R' = a'\sqrt{11}/(2\sqrt{2})$.

D'autre part, on sait que la sphère intermédiaire du tétraèdre *ABCD* passe par les milieux de ses faces, comme *I* milieu de [*AB*] (*figure 10*). Ce sont aussi les milieux de certaines faces des hexagones réguliers du tétraèdre tronqué, comme [*MN*], [*PQ*] et [*RS*]. Cette sphère intermédiaire coupe une face comme *ABC* suivant un cercle qui est aussi le cercle inscrit de l'hexagone du tétraèdre tronqué, et elle passe aussi par les milieux des autres côtés de l'hexagone, qui sont aussi les milieux des côtés des faces triangulaires. C'est donc aussi la sphère intermédiaire du tétraèdre tronqué, et son rayon est $R_i = a / (2\sqrt{2}) = 3a' / (2\sqrt{2})$.

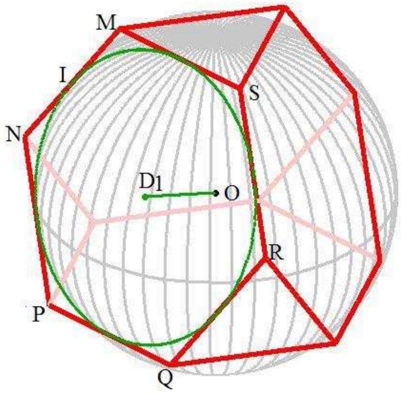


Figure 10 : La sphère intermédiaire du tétraèdre tronqué, avec le cercle d'intersection inscrit dans l'hexagone régulier.

4.3. Troncature faible et troncature forte

Le téraèdre tronqué est aussi appelé tétraèdre faiblement tronqué, lorsque la face du tétraèdre régulier devient un hexagone régulier. Mais en poursuivant la troncature jusqu'à sa limite (*figure 11*), la face du téraèdre régulier devient un triangle équilatéral. On parle alors de troncature forte. Dans ce cas, on constate que l'on trouve un octaèdre régulier.

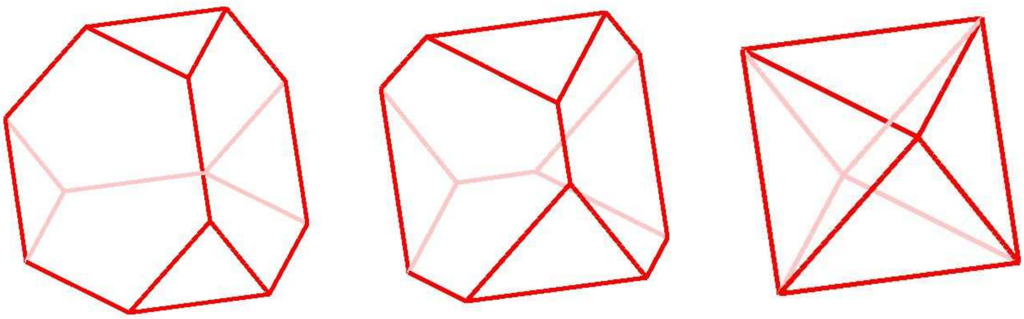


Figure 11 : Du ttétraèdre (faiblement) tronqué *à gauche* au tétraèdre fortement tronqué qui est un octaèdre régulier *à droite*, en passant par une étape intermédiaire.

5. Le triaki-tétraèdre, dual du tétraèdre tronqué

Utilisons encore la dualité polaire par rapport à la sphère intermédiaire. Les faces hexagonales du tétraèdre tronqué sont dans les mêmes plans que les faces du tétraèdre régulier. On connaît déjà les transformés de ces plans, soit *A*', *B*', *C*', *D*', et l'on retrouve le tétraèdre auto-dual de *ABCD*. Ce sont aussi des sommets du dual du tétraèdre tronqué, ainsi que des arêtes de ce dual (*figure 12*). Il reste à déterminer les transformés des plans contenant les faces triangulaires.

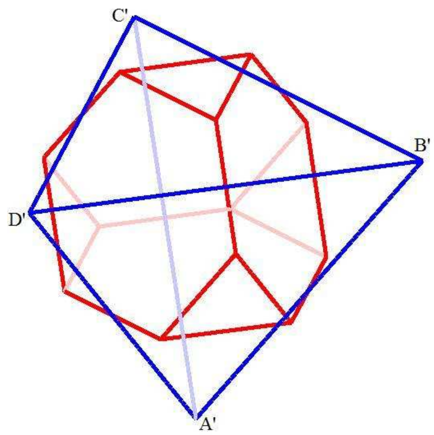


Figure 12 : Le dual *A'B'C'D'* du tétraèdre régulier *ABCD* est aussi une partie du dual du tétraèdre tronqué.

Privilégions la face haute *MST* du tétraèdre tronqué (*figure 13*), coupée perpendiculairement en son centre Q_0 par la hauteur [*AH*] du tétraèdre régulier. On connaît $OA = R = a\sqrt{6}/4$ ainsi que $AH = a\sqrt{2}/\sqrt{3}$, d'où $AQ_0 = a\sqrt{2}/(3\sqrt{3})$. On en déduit que $OQ_0 = OA - AQ_0 = 5a\sqrt{6}/36$.

Le plan de *MST* a pour transformé par dualité polaire le point Q'_0 sur $[OQ_1)$ tel que $OQ_0\, OQ'_0 = R_i^2$. On trouve $OQ'_0 = 3a\sqrt{6}/20$. Le point Q'_0, sur la hauteur verticale (*OA*), est à l'altitude OQ'_0 en considérant les plans *BCD* ou *B'C'D'* comme horizontaux. D'autre part le plan *B'C'D'* est à l'altitude $R/3$ (= *r*). La distance séparant le point Q'_0 du plan *A'B'C'* est *h* telle que:

$$h = OQ'_0 - R/3 = 3a\sqrt{6}/20 - a\sqrt{6}/12 = a\sqrt{6}/15$$

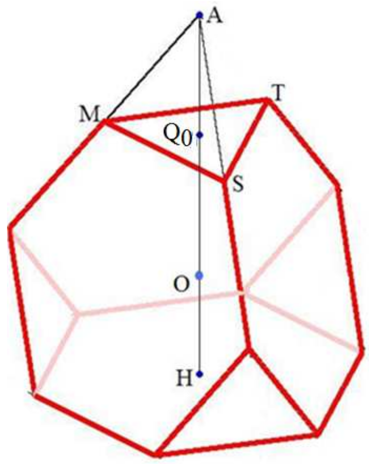


Figure 13 : Position du centre Q_0 de la face triangulaire *MST* du tétraèdre tronqué.

Il reste à compléter la construction du dual en joignant le point Q'_0 aux trois sommets du triangle équilatéral *B'C'D'*, ce qui donne une pyramide droite à base triangulaire de hauteur $h = a\sqrt{6}/15$, et dont les faces sont des triangles isocèles (*figure 14*). Ceux-ci ont leur base de longueur *a* (rappelons que *a* est la longueur de l'arête du tétraèdre initial). Les deux autres côtés ont pour longueur Q_0B', avec $Q_0B'^2 = 6a^2/15^2 + a^2/3 = 9\,a^2/25$, soit $Q_0B' = 3\,a\,/\,5$. On peut vérifier que les deux angles égaux d'un triangle sont tels que $\cos\theta = 5/6$. Et ce que l'on a fait avec la pyramide accolée à la face *B'C'D'*, on le fait aussi avec les autres faces. Remarquons que la distance entre *O* et les sommets du dual n’est pas la même. Pour les points *A’*, *B’*, *C’*, *D’*, elle vaut $R = a\sqrt{6}/4$, et pour les points comme Q'_0 elle vaut $3a\sqrt{6}/20$. Le dual n’a pas de sphère circonscrite.

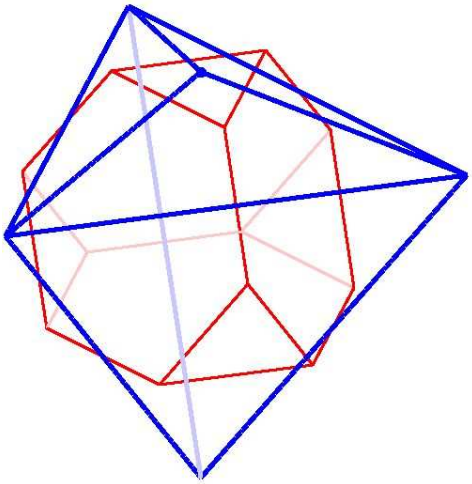


Figure 14 : Construction partielle du dual du tétraèdre tronqué, avec la face *B’C’D’* surmontée d’une pyramide droite.

Finalement, le dual du tétraèdre tronqué peut s’obtenir en partant d’un tétraèdre régulier, puis en accolant sur chacune de ses quatre faces des pyramides droites de hauteur *h*, dont les pointes se projettent au centre de grravité des faces du tétraèdre régulier sous-jacent. Cela explique le nom de triaki-tétraèdre attribué à ce dual (*figure 15*).

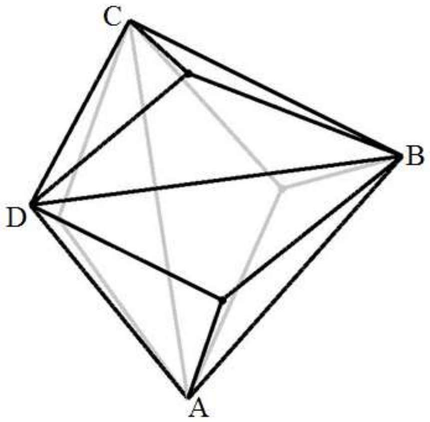


Figure 15 : Le dual du tétraèdre tronqué, ou triaki-tétraèdre, formé d’un tétraèdre régulier *ABCD* dont les faces sont surmontées de pyramides droites.

La dualité sommets ↔ faces se manifeste ainsi : puisque chaque sommet du tétraèdre tronqué a une configuration (3 6 6) de longueur $n = 3$, chaque face de son dual est un polygone à $n = 3$ sommets, soit un triangle, lui-même avec un sommet entouré de 3 faces et les deux autres de 6 faces.

6. Solides de Platon, solides d’Archimède et solides de Catalan

6.1. Solides de Platon et leurs duaux

Les solides de Platon sont les polyèdres réguliers. Ils sont au nombre de cinq (cela se démontre facilement), le tétraèdre régulier étant le plus simple et le plus « petit », les autres étant le cube, l’octaèdre, l’icosaèdre et le dodécaèdre. Mais qu’appelle-t-on exactement un polyèdre régulier ?

Un polyèdre régulier est par définition un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers plans identiques, avec des sommets tous entourés de la même façon par des faces. Il en découle qu'un polyèdre régulier a tous ses angles dièdres égaux entre faces adjacentes, et qu'il possède une sphère circonscrite, une sphère inscrite et une sphère intermédiaire.

En appelant p le nombre de sommets d'une face polygonale, et q le degré d'un sommet, c'est-à-dire le nombre de faces entourant chaque sommet, un polyèdre régulier est caractérisé par la donnée de (p, q), soit (3, 3) pour le tétraèdre, (4, 3) pour le cube, (3, 4) pour l'octaèdre, (3, 5) pour l'icosaèdre et (5, 3) pour le dodécaèdre.

Un polyèdre régulier admet un polyèdre dual qui est aussi un polyèdre régulier. En effet, une face à p sommets devient par dualité un sommet de degré p, et un sommet de degré q devient une face à q sommets. Le dual d'un polyèdre régulier (p, q) devient le polyèdre régulier (q, p). Le dual du tétraèdre régulier est le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre sont duaux, tout comme l'icosaèdre et le dodécaèdre. Ces duaux ont le même nombre d'arêtes. Pour le tétraèdre régulier, on a vu qu'en utilisant la sphère intermédiaire pour l'opération de dualité, il suffisait de remplacer chaque arête par une perpendiculaire touchant la sphère au même point pour obtenir le tétraèdre dual. Il en est de même pour les autres polyèdres réguliers. Deux polyèdres réguliers duaux ont aussi le même groupe de symétries.

6.2. Solides d'Archimède

Lorsque nous sommes passés du tétraèdre -solide de Platon, au tétraèdre tronqué, nous avons obtenu un polyèdre dont les faces sont constituées de deux types de polygones réguliers, et qui présente les mêmes symétries que le tétraèdre régulier, autrement dit, on peut passer d'un sommet quelconque à un sommet quelconque par une isométrie qui le laisse globalement invariant. Cela s'appelle un solide d'Archimède, et c'est un polyèdre dit semi-régulier.

Plus généralement, un polyèdre semi-régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont formées d'au moins deux types de polygones réguliers, et qui admet des symétries transportant un sommet quelconque en un sommet quelconque. Cela entraîne que ses sommets ont tous la même configuration. Cette configuration s'écrit sous forme d'une liste cyclique constituée des nombres d'arêtes des faces successives entourant un sommet. Par exemple le tétraèsdre tronqué a comme configuration (3, 6, 6) car un sommet a autour de lui un triangle équilatéral suivi de deux hexagones réguliers. Une telle configuration de sommet caractérise un polyèdre semi-régulier. Il s'ensuit qu'un polyèdre semi-régulier a toutes ses arêtes de même longueur, et qu'il admet une sphère circonscrite.

Les prismes droits dont les deux bases sont des polygones réguliers (avec n sommets chacun) et les faces latérales des carrés, entrent dans la catégorie des polyèdres semi-réguliers.[2] Selon la valeur prise par n, il en existe une infinité. De même les antiprismes à faces régulières sont des polyèdres semi-réguliers. Ils ont aussi deux bases identiques qui sont des polygones réguliers (à n sommets) mais l'un tourné par rapport à l'autre de façon que les faces latérales soient des triangles équilatéraux (au nombre de $2n$).[3] Il existe aussi une infinité de tels antiprismes (*figure 16 en haut*). Ces prismes et antiprismes possèdent des symétries diédrales, notamment des rotations autour d'un axe central.

Les prismes définis ci-dessus admettent pour duaux des bi-pyramides droites dont la base est aussi un polygone régulier à n sommets, aussi appelés diamants. Les antiprismes admettent pour duaux des antidiamants (*figure 16 en bas*).

[2] Le cube est un prisme droit à faces régulières, mais comme il n'est formé que d'un seul type de faces, on peut l'exclure de la catégorie des polyèdres semi-réguliers.

[3] On peut exclure le tétraèdre régulier qui est un antiprisme dont les bases sont réduites à deux segments perpendiculaires, aisni que l'octaèdre réglier dont les bases sont des triangles équilatéraux tournés de 120° l'un par rapport à l'autre. Ils n'ont en effet qu'un seul type de faces.

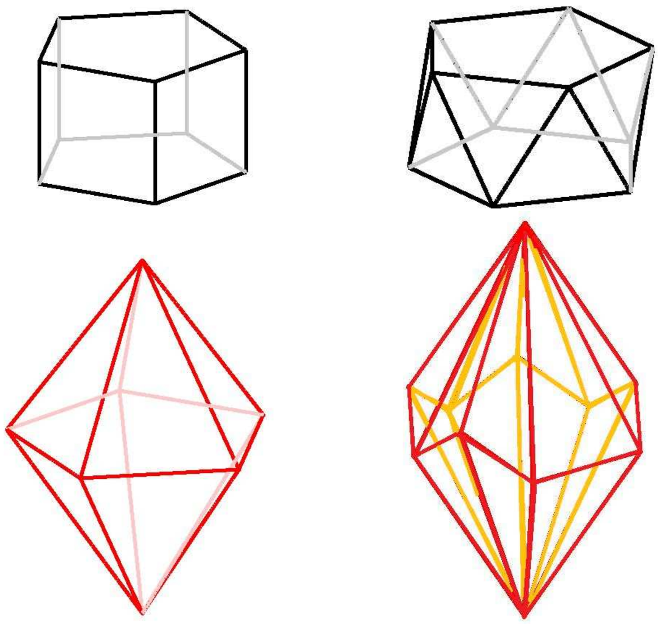


Figure 16 : *En haut à gauche* un prisme droit avec des bases qui sont des pentagones réguliers et des faces latérales carrées, *à droite* un antiprisme avec des bases qui sont des prntagones réguliers et des faces latérales qui sont des triangles équilatéraux. *En bas* leurs duaux respectifs, le diamant et l'antidiamant.

Les autres polyèdres semi-réguliers sont appelés solides d'Archimède. Ils se distinguent des prismes et des antiprismes car il n'en existe qu'un nombre fini, à savoir 13, et qu'ils possèdent des symétries plus variées que les simples symétries diédrales, à savoir les symétries des polyèdres réguliers dont ils sont issus.

Ce que l'on a fait par troncature faible pour passer du tétraèdre régulier au *tétraèdre tronqué* peut aussi être fait à partir des quatre autres polyèdres de Platon. Lorsque l'on rogne les pointes pour obtenir des faces en forme de polygone régulier, par exemple au tiers de la longueur des côtés si l'on avait initialement un triangle, une face triangulaire est transformée en hexagone régulier, une face carrée est transformée en octogone régulier, une face pentagonale devient un dodécagone régulier. On trouve ainsi le *cube tronqué* dont la configuration de sommets est (3 8 8) (*figure 17*), *l'octaèdre tronqué* (4 6 6), le *dodécaèdre tronqué* (3 10 10) et l'*icosaèdre tronqué* (5 6 6) (*figure 19 au centre*).

Faisons maintenant une troncature forte, en rognant les pointes jusqu'au milieu des côtés. On a vu que le tétraèdre régulier donne un octaèdre régulier qui n'est pas semi-tégulier. Mais le cube et l'octaèdre donnent tous deux le *cuboctaèdre* (*figures 17 et 18*) , tandis que le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers donnent tous deux l'*icosidodécaèdre* (*figure 19 à droite*).

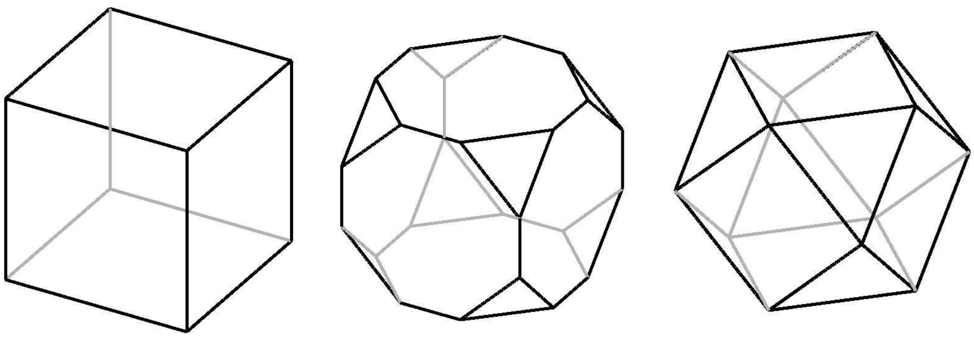


Figure 17 : Du cube *à gauche* aux cubes tronqués par troncature faible puis troncature forte, ce qui donne le cube tronqué *au centre* et le cuboctaèdre *à droite*.

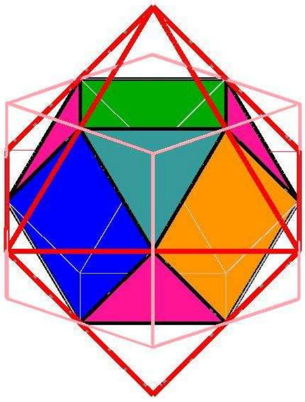


Figure 18 : Troncature forte de l'octaèdre régulier (*en rouge*) et du cube (*en rose*), donnant le même cuboctaèdre.

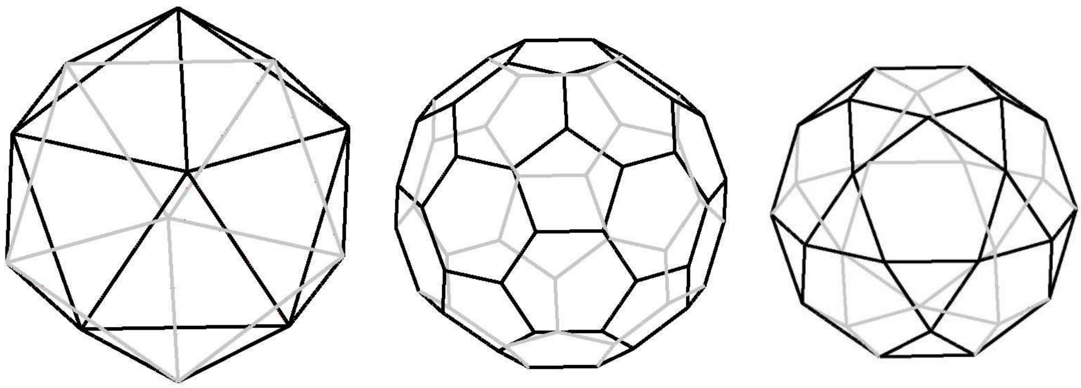
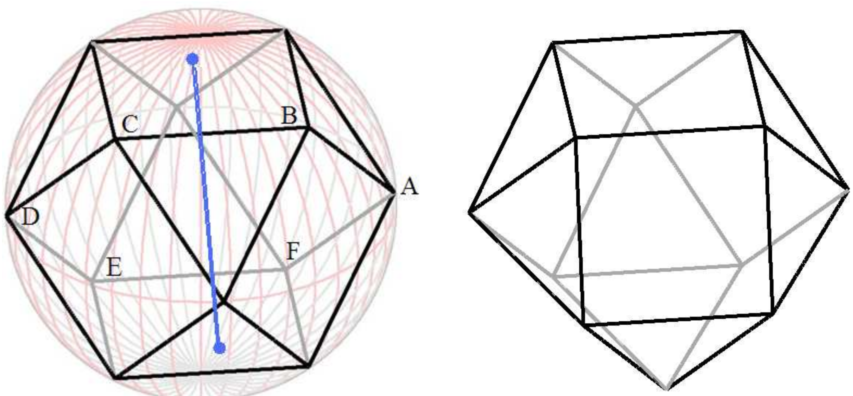


Figure 19 : *A gauche* l'icosaèdre régulier, *au centre* l'icosaèdre tronqué (troncature faible) et *à dtoite* l'icosidodécaèdre (par troncature forte).

A l'occasion, on remarque que le cuboctaèdre présente une particularité, il peut être découpé en deux parties identiques suivant un plan sur lequel se trouvent six de ses sommets, *ABCDEF* sur la *figure 20 à gauche*. En faisant tourner une partie par rapport à l'autre de 60°, on trouve un nouveau polyèdre avec la même sphère circonscrite et deux types de faces qui sont des polygones réguliers (*figure 20 à droite*). Mais avec ce polyèdre, que l'on peut appeler gyro-cuboctaèdre, on ne peut plus passer d'un sommet quelconque à un sommet quelconque en le laissant globalement invariant, autrement dit ce polyèdre ne possède plus les symétries du cube qui sont aussi celles du cuboctaèdre. Le gyro-cuboctaèdre n'est donc pas un polyèdre semi-régulier.



s

Figure 20 : *A gauche* le cuboctaèdre avec sa sphère circonscrite, *à droite* le gyro-cuboctaèdre, où les faces situées sous l'hexagone *ABCDE* sont tournées de 60° autour de l'axe (*en bleu*) joignant les centres de gravité de deux faces triangulaires opposées.

Les troncatures nous ont déjà donné sept solides d'Archimède. Continuons en tronquant ceux qui sont déjà tronqués. Mais si l'on tronque un polyèdre semi-régulier, avec des sommets entourés de plusieurs types de polygones réguliers, on n'obtient plus de polygones réguliers autour de ces sommets, et l'on n'a plus un polyèdre semi-régulier. Toutefois les troncatures faible et forte du cuboctaèdre ainsi que de l'icosidodécaèdre donnent des polyèdres qui ressemblent à des polyèdres semi-réguliers.

Pour le cuboctaèdre, on voit les résultats obtenus sur la *figure 21*, avec la présence de rectangles, les arêtes ayant deux longueurs. Il est alors possible d'effectuer quelques modifications pour transformer les rectangles en carrés et obtenir le *cubocatèdre tronqué* et le *rhombicuboctaèdre*[4], qui sont des solides d'Archimède (*figure 22*).

De même, les troncatures de l'*icosidodécaèdre* donnent, après modifications, l'*icosidodécaèdre tronqué* et le *rhombicosidodécaèdre* (*figure 23*). Nous arrivons ainsi à 11 solides d'Archimède, qui héritent de toutes les symétries des polyèdres réguliers dont ils sont issus.

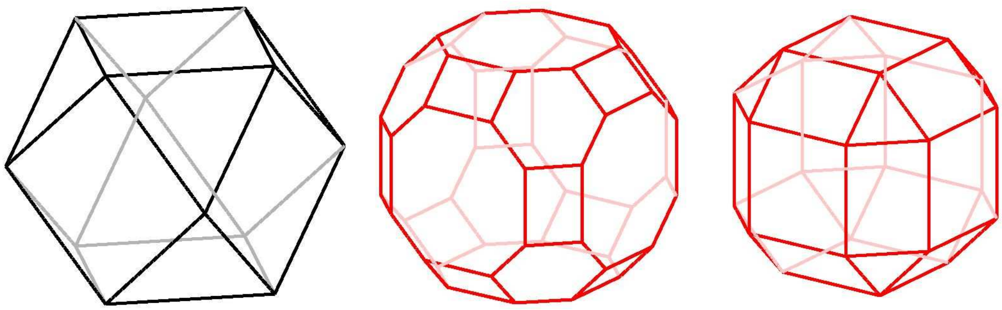


Figure 21 : Du cuboctaèdre (*à gauche*) aux deux cuboctaèdres tronqués, le premier faiblement tronqué (*au centre*) et le deuxième fortement tronqué (*à droite*), ce dernier avec la présence de faces rectangulaires et d'arêtes qui n'ont pas la même longueur : ce n'est plus un polyèdre semi-régulier.

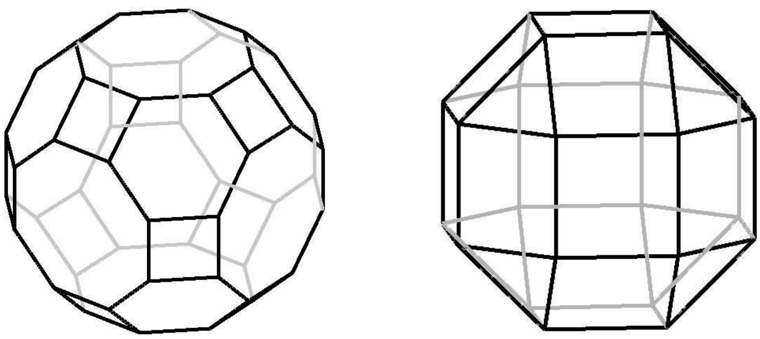


Figure 22 : Deux solides d'Archimède : le cuboctaèdre tronqué *à gauche* et le rhombicuboctaèdre *à droite*.

[4] On peut remarquer que le rhombicuboctaèdre présente une coupole haute et une coupole basse séparées par une couronne de carrés. Il est alors possible de faire tourner une coupole par rapport à l'autre d'un angle de $\pi/4$, mais ce faisant on n'a plus un polyèdre semi-régulier, pour les mêmes raisons que celles données pour le gyro-cuboctaèdre.

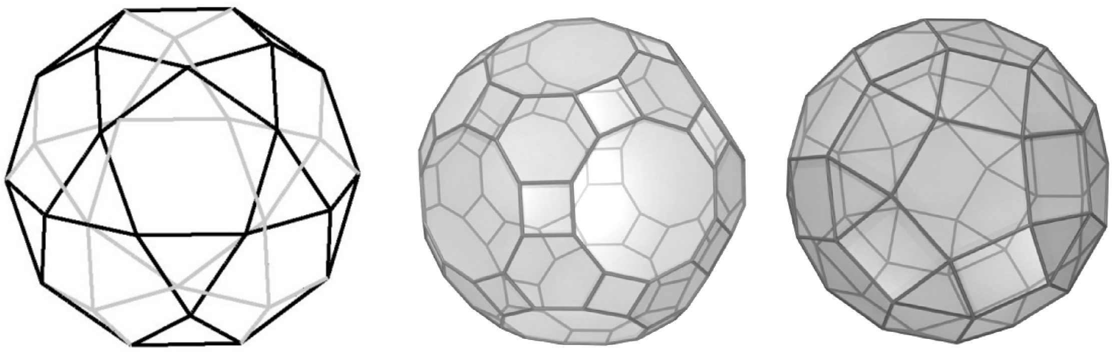


Figure 23 : A partir de l'icosidodécaèdre *à gauche*, on obtient, par troncatures faible et forte, et dans ce dernier cas avec quelques modifications pour donner aux arêtes la même longueur, l'icosidodécaèdre tronqué *au centre,* et le rhombicosidodécaèdre *à droite*[5].

A ce stade, il reste les deux derniers solides d'Archimède, qui s'appellent le *cube adouci* (ou *cuboctaèdre adouci*) et le *dodécaèdre adouci* (ou *icosidodécaèdre adouci*). On peut les considérer comme des dérivés du cuboctaèdre et du rhombicosidodécaèdre, mais à condition de procéder à une rotation relative de leurs faces opposées et à d'autres modifications. En partant du cuboctaèdre, quatre de ses faces carrées opposées deux à deux et parallèles sont tournées de 45° l'une par rapport à l'autre, et en coupant les autres carrés en deux pour avoir des triangles, on fait en sorte que tous les triangles deviennent équilatéraux (*figure 24 à gauche*). On fait de même à partir du rhombicosidodécaèdre, en tournant les faces pentagonales opposées de $\pi/5$, et en découpant les carrés en deux, pour finalement s'arranger pour n'avoir que des triangles équilatéraux (*figure 24 à droite*).

A cause de ces rotations de faces, ces deux polyèdres adoucis perdent les symétries de réflexion par rapport à des plans ainsi que la symétrie centrale, symétries qu'avaient le cube et l'icosaèdre dont ils sont issus, et ils n'en conservent que les isométries positives (les rotations). Selon le sens dans lequel sont tournées les faces, on a deux semi-polyèdres différents dans chacun des deux cas. En faisant cette distinction, il existe si l'on préfère 15 solides d'Archimède.

Les solides d'Archimède ont tous en commun le fait d'avoir une sphère circonscrite ainsi qu'une sphère intermédiaire (tangente aux arêtes), mais ils n'ont pas de sphère inscrite, car le fait d'avoir au moins deux types de faces fait que la distance au centre n'est pas la même pour des faces de type différent.

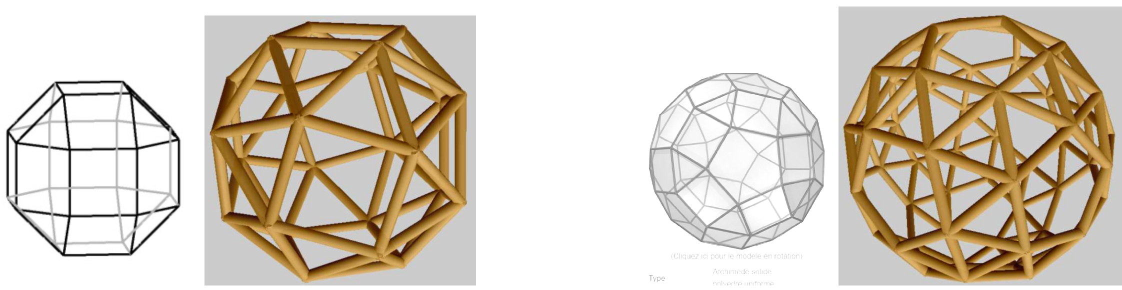


Figure 24 : *A gauche sur fond gris* le cube adouci (ou cuboctaèdre adouci) et *à droite* le dodécaèdre adouci (ou icosidodécaèdre adouci), avec *à leur gauche* le cuboctaèdre et le rhombicosidodécaèdre dont ils sont les transformés.

Pour conclure, nous donnons sur la *figure 25* un récapitulatif des solides d'Archimède tels qu'ils sont obtenus à partir des solides de Platon, par troncatures faible ou forte, ou finalement par adoucissement.

[5] Les images de ces deux solides d'Archimède sont tirées des articles de *Wikipedia* à ce sujet. Pour avoir de nombreux renseignements sur les polyèdres d'Archimède et d'autres polyèdres, on pourra consulter le site *mathcurve polyèdres.*

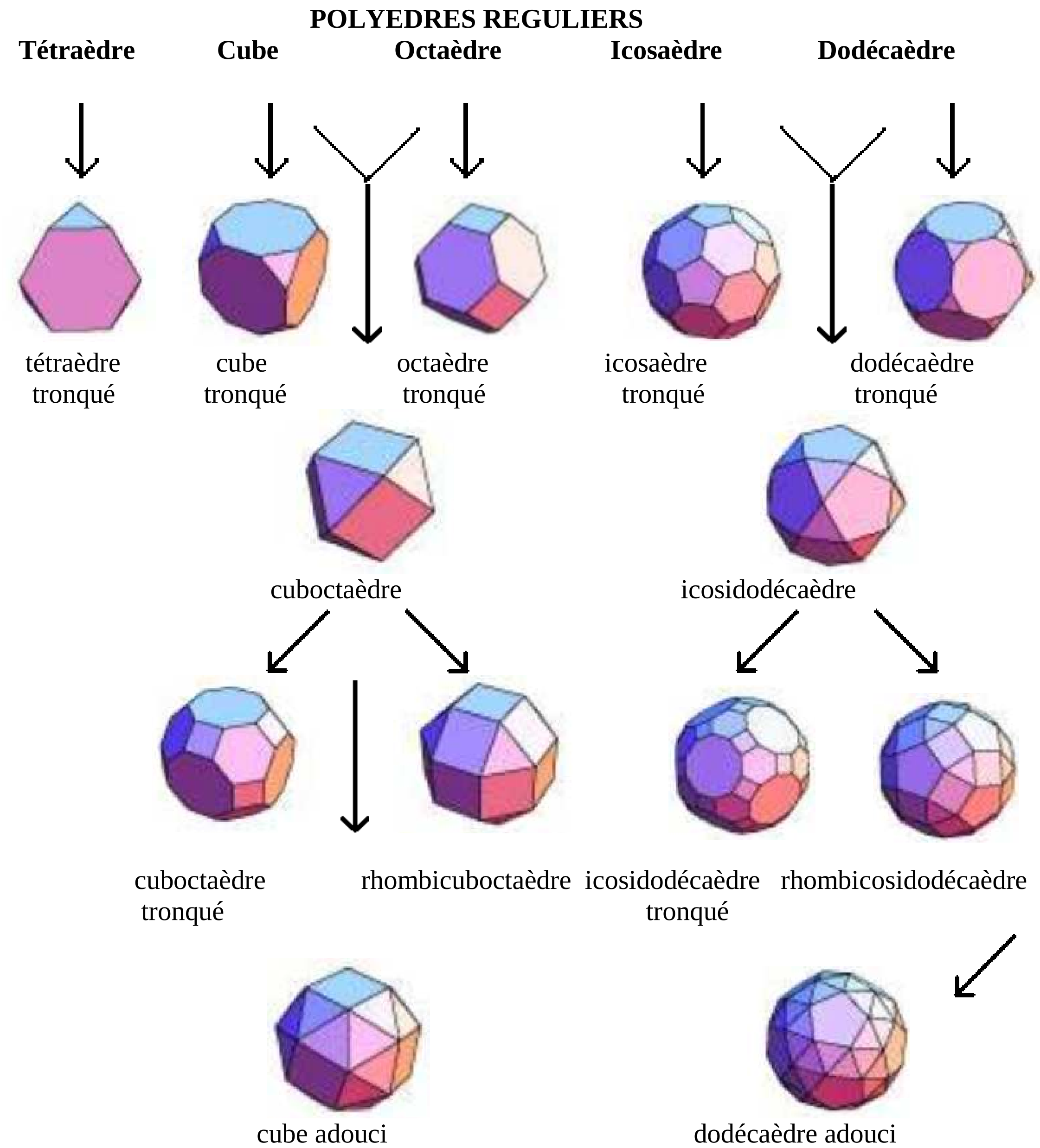


Figure 25 : Les treize solides d'Archimède tels qu'on les trouve à partir des cinq polyèdres réguliers.

6.3. Les solides de Catalan

6.3.1. Définition et propriétés

Par définition, les solides de Catalan[6] sont les duaux des solides d'Archimède. Ils sont donc au nombre de treize. La dualité peut être opérée soit par rapport à la sphère circonscrite soit par rapport à la sphère intermédiaire des solides d'Archimède.

Nous allons utiliser de préférence la sphère intermédiaire. On sait que dans ce cas, chaque arête *d* d'un solide d'Archimède est transformée en une arête *d'*du dual telle que *d'* est perpendiculaire à *d* avec un point commun à *d* et *d'* qui est le point de tangence de l'arête *d* avec la sphère intermédiaire. A son tour, l'arête *d'* est aussi tangente à la sphère. Il en résulte qu'un solide de Catalan admet une sphère intermédiaire qui est la même que celle du solide d'Archimède associé.

A cause de la dualité, lorsqu'un solide d'Archimède a *S* sommets, *F* faces et *A* arêtes,avec une configuration de sommet de longueur *n* (sommets de degré *n*), le solide de Catalan dual a *S* faces polygonales à *n* sommets, *F* sommets et le même nombre *A* d'arêtes[7]. Et comme la dualité préserve les symétries, les faces polygonales du solide de Catalan sont toutes identiques. Enfin, si la configuration de sommets du solide d'Arhimède est, par exemple, de la forme (*a*, *b*, *b*), la configuration de faces du dual est aussi de la forme (*a*, *b*, *b*), ce qui signifie que chaque face polygonale a un de ses sommets entouré de *a* faces, et les deux autres sommets de *b* faces.

6.3.2. Polyèdres duaux des polyèdres d'Archimède faiblement tronqués

Commençons par les cinq polyèdres d'Archimède obtenus par troncature faible des polyèdres réguliers. Nous avons déjà vu le cas du tétraèdre tronqué dont le dual est le triaki-tétraèdre : une partie des faces du tétraèdre tronqué étant dans le même plan que celles du tétraèdre régulier originel, leurs images par dualité avaient donné les sommets du dual du tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre régulier, et les autres faces (les triangles) avaient donné des sommets qui étaient les pointes de pyramides dont les bases étaient les faces du tétraèdre régulier dual. Il en est de même pour tous les duaux des polyèdres d'Archimède obtenus par troncature faible des polyèdres réguliers. Il suffit de prendre le dual du polyèdre originel, qui est aussi un polyèdre régulier, et d'accoler sur ses faces des pyramides droites ayant une certaine hauteur *h*.

Prenons l'exemple du cube tronqué. Pour avoir son dual, commençons par prendre le dual du cube, à savoir l'octaèdre régulier, et accolons sur ses 8 faces triangulaires des pyramides droites. Le polyèdre dual obtenu ainsi est appelé triaki-octaèdre (*figure 26*). A partir de la configuration de sommets (3 6 6) (de longueur 3) du cube tronqué, on peut vérifier que le dual est formé de faces triangulaires ayant un des sommets entouré de 3 faces et les deux autres de 6 faces. Et comme les faces de l'octaèdre ont des angles dièdres égaux, tout comme ceux des faces des pyramides avec celles de l'octaèdre, le triaki-octaèdre a tous ses angles dièdres égaux.

---

[6] E. Catalan a été le premier à faire une étude exhaustive des duaux des solides d'Archimède, dans les années 1860. On pourra consulter avec profit sur Internet l'article *Catalan et ses polyèdres* de J.J. Dupas et N. Verdier (bulletin de la Sabix, 2015). Pour la petite histoire, signalons que Catalan s'est fait virer de l'Ecole Polythcnique à cause de ses opinions politiques, avant d'être réintégré un an plus tard.

[7] Les solides d'Archimède et de Catalan étant convexes, ils obéissent tous deux à la formule d'Euler $F + S - A = 2$. L'échange de *F* et *S* ne modifie pas *A*.

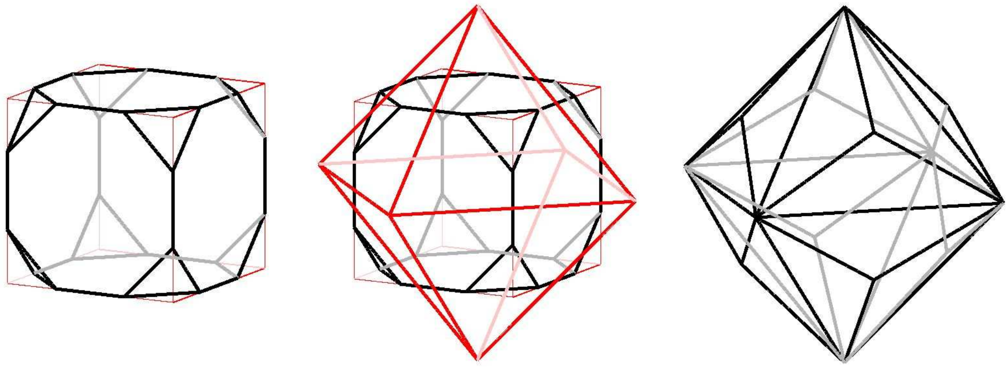


Figure 26 : *A gauche* le cube tronqué, *au centre* ajout de l'octaèdre régulier, dual du cube, et qui est aussi une partie du dual du cube tronqué, *à droite* le triaki-octaèdre, dual du cube tronqué, avec ses pyramides accolées sur les faces de l'octaèdre.

Exercice 1 : Détermination de la hauteur h des pyramides du triaki-octaèdre, à partir d'un cube dont les côtés ont pour longueur 2.

1) *Déterminer la longueur a des côtés du cube tronqué.*

En s'aidant de la *figure 27,* considérons la face haute du cube tronqué, en forme d'octogone régulier..En utilisant un côté du cube comme [*AB*] avec *AB* = 2, on doit avoir :

$a + a\sqrt{2} = 2$, soit $a = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$.

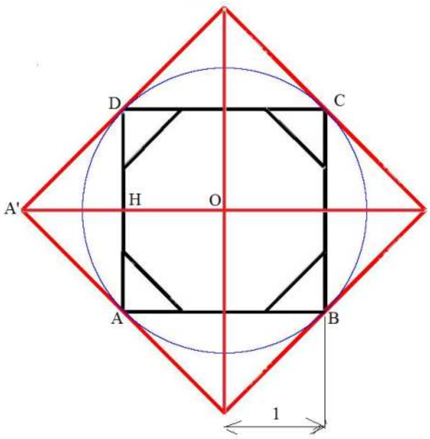


Figure 27 : Vue de haut du cube et du cube tronqué *en noir,* avec la sphère intermédiaire *en bleu*, et l'octaèdre dual du cube *en rouge*.

2) *Quel est le rayon R_i de la sphère intermédiaire du cube tronqué ?*

Les arêtes verticales du cube et du cube tronqué, réduites aux points *A*, *B*, *C*, *D* sur la *figure 27,* sont portées par la même droite. La sphère intermédiaire du cube est donc aussi celle du cube tronqué, le point de contact étant au milieu de ces arêtes. Son rayon est $R_i = \sqrt{2}$.

3) *Construire l'octaèdre dual du cube, et déterminer le rayon de sa sphère circonscrite, la longueur a'de ses côtés et le rayon de sa sphère inscrite.*

Appelons *H* la projection du centre *O* sur un carré du cube (*figure 27*). Ce point *H* est aussi bien le centre de ce carré du cube que le centre de la face correspondante octogonale du cube tronqué. On a aussitôt *OH* = 1. Considérons le point *A'*, sommet dual de la face carrée ou octogonale. Il est situé sur

[OH) et il est tel que $OH\ \ OA' = R_i^2$, d'où $OA' = 2$. C'est aussi le rayon de la sphère circonscrite à l'octaèdre. Les triangles équilatéraux qui forment l'octaèdre ont leurs côtés de longueur $a' = 2\sqrt{2}$.

Appelons K la projetion de O sur une face RST de l'octaèdre (*figure 28 à gauche et au centre*). Pour des raisons de symétries, K est le centre de gravité du triangle équilatéral de la face. Il est aux deux-tiers de la médiane [RJ] à partir de R, d'où $JK = (1/3)\ JR = (1/3)\ a'\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{2}\sqrt{3}/6 = \sqrt{2/3}$. D'autre part, $OJ = a'/2 = \sqrt{2}$. Dans le triangle rectangle OJK : $OK^2 = 2 - 2/3 = 4/3$ et $OK = 2/\sqrt{3}$, OK étant par ailleurs le rayon du cercle inscrit dans l'octaèdre.

4) *Déterminer les sommets duaux des faces triangulaires du cube tronqué.*

Considérons une face triangulaire UVW du cube tronqué, de centre P (*figure 28 à droite et au centre*), qui est aussi la projection du point O sur la face. On a déjà :

$WP = (2/3)\ a\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)/3$.

D'autre part la distance OW, qui est le rayon de la sphère circonscrite au cube tronqué, vérifie, dans le triangle rectangle OJW : $OW^2 = 2 + a^2/4 = 2+(\sqrt{2}-1)^2 = 5-2\sqrt{2}$. Dans le triangle rectangle OPW : $OP^2 = OW^2 - PW^2 = 5-2\sqrt{2}-(4/3)(\sqrt{2}-1)^2 = 1+(2/3)\sqrt{2}$.

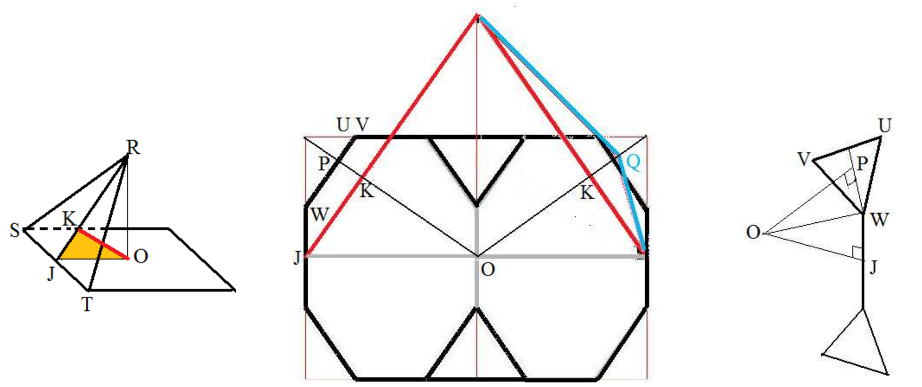


Figure 28 : *A gauche*, une face *RST* de l'octaèdre et le projeté *K* de *O* sur cette face. *Au centre*, vue de profil du cube tronqué (*en noir*), de l'octaèdre (*en rouge*), et d'une pyramide accolée à une face de l'octaèdre (*en bleu*). *A droite*, une face triangulaire *UVW* du cube tronqué, et le projeté *P* de *O* sur cette face.

La face UVW a pour dual le point Q tel que $OP\ .\ OQ = R_i^2$, soit

$OQ = 2/\sqrt{1+(2/3)\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}/\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1) \approx 1{,}435$.

Ce point Q est le sommet d'une pyramide accolée à une face de l'octaèdre. La hauteur de la pyramide est $h = KQ = OQ - OK$

$$= 6(\sqrt{2}-1)/\sqrt{3} - 2/\sqrt{3} = (2/\sqrt{3})(3(\sqrt{2}-1)-1) = (2/\sqrt{3})(3\sqrt{2}-4)$$

soit $h \approx 0{,}28$

5) En déduire la longueur des côtés des faces triangulaire du triaki-octaèdre.

Les faces sont des triangles isocèles dont la base a pour longueur $a' = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$ et dont les deux autres côtés ont pour longueur c telle que $c^2 = h^2 + 8/3 = 8(6-4\sqrt{2}) \approx 2{,}745$, d'où $c = 4(\sqrt{2}-1) \approx 1{,}6568$. On a aussi comme rapport des côtés $a'/c = (1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$, et ce rapport est le même quelles que soient les dimensions prises au départ (rappelons que nous étions partis d'un cube de côté égal à 2).

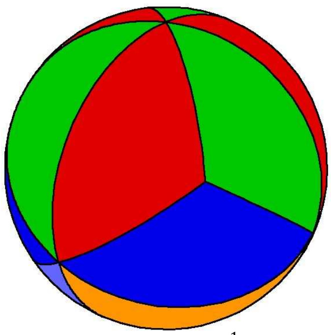
A travers cet exemple, des différences fondamentales apparaissent entre les solides d'Archimède et les solides de Catalan :

- Les premiers ont une sphère circonscrite, les seconds n'en ont pas.
- Les uns ont des faces qui sont des polygones réguliers de plusieurs types, les autres ont des faces qui sont toutes identiques, mais qui ne sont pas des polygones réguliers.

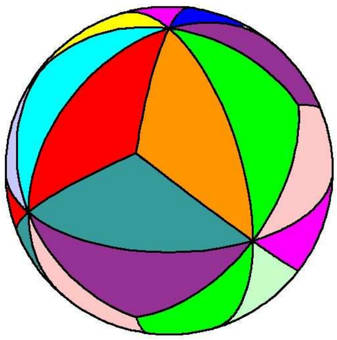
6.3.3. Projection sur une sphère

Les solides de Catalan n'ont pas de sphère circonscrite, mais on peut envoyer tous les sommets sur une sphère par projection radiale (à partir du centre). On obtient alors des polygones sphériques qui sont tous identiques, autrement dit la sphère se trouve pavée avec un seul type de pavés. Les pavages sphériques associés aux solides de Catalan duaux des solides d'Archimède tronqués faiblement sont donnés sur la *figure 29*.

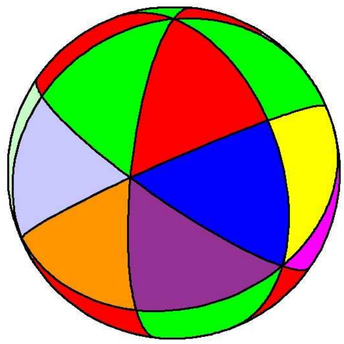
Reprenons les deux exemples que nous avons traités. Pour le triaki-tétraèdre dual du tétraèdre tronqué, on peut prendre la sphère circonscrite au tétraèdre dual, ce qui donne une partie des sommets du solide de Catalan, puis on projette les pointes des pyramides sur la sphère pour avoir les autres sommets du solide de Catalan projeté sur la sphère. De même avcc le triaki-octaèdre, où il suffit de projeter les pointes des pyramides sur la sphère circonscrite à l'octaèdre[8]. On fait de même dans les autres cas. Par exemple, à partir de l'octaèdre tronqué (solide d'Archimède), on prend le dual de l'octaèdre régulier, soit un cube (aussi appelé hexaèdre), puis on projette les pointes des pyramides accolées aux faces carrées du cube sur sa sphère circonscrite, ce qui donne le tétraki-hexaèdre.



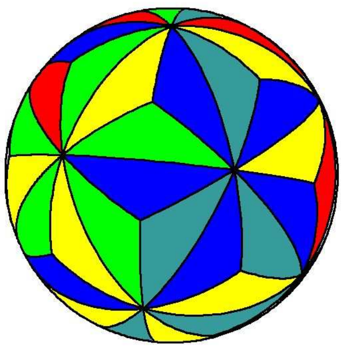
Triaki-tétraèdre $F_{12}{}^{1}$
(dual du tétraèdre tronqué)



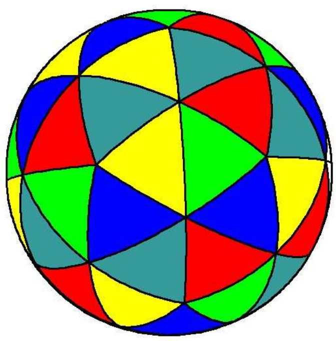
Triaki-octaèdre F_{24}
(dual du cube tronqué)



Tetraki-hexaèdre I_{24}
(dual de l'octaèdre tronqué)



Triaki-icosaèdre $F_{60}{}^{1}$
(dual du dodécaèdre tronqué)



Pentaki-dodécaèdre $F_{60}{}^{2}$
(dual de l'icosaèdre tronqué)

Figure 29 : Vision sphérique des solides de Catalan duaux des solides d'Archimède faiblement tronqués.

[8] On avait vu que la hauteur h des pyramides du triaki-octaèdre était $h \approx 0{,}28$. En utilisant les notations de l'*exercice 1* précédent, la hauteur des pyramides après projection sur la sphère circonscrite à l'ocatèdre est $h' = OA' - OK = 2 - 2/\sqrt{3} \approx 0{,}845$.

6.3.4. Polyèdres duaux des polyèdres d'Archimède fortement tronqués

Les polyèdres d'Archimède correspondants sont au nombre de deux :

- Le cuboctaèdre avec ses 6 faces carrées et ses 8 faces triangulaires. Il donne comme dual le dodécaèdre rhombique avec 12 faces identiques en forme de losange.

- L'icosidodécaèdre avec ses 20 faces triangulaires et ses 12 faces pentagonales. Il a comme dual le triacontaèdre rhombique avec 30 faces en forme de losange.

Le passage du cuboctaèdre à son dual est donné sur la *figure 30*, et les propriétés du dual sont traitées dans l'exercice suivant.

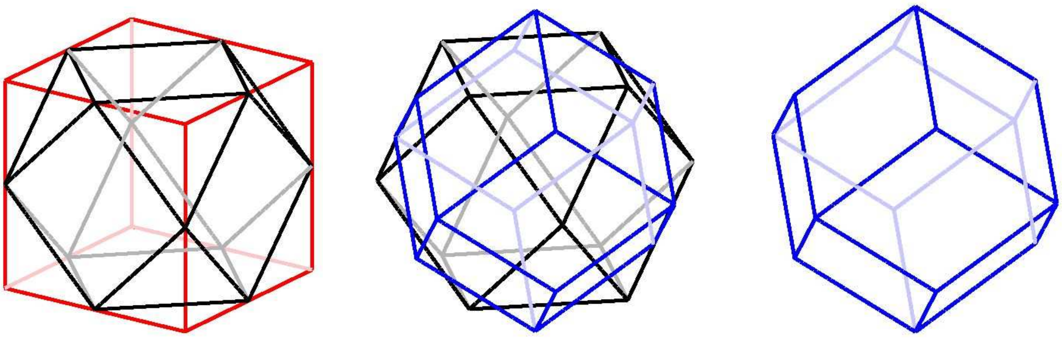


Figure 30 : *A gauche* le cuboctaèdre *en noir* et le cube associé *en rouge*. *Au centre*, le dodécaèdre rhombique *en bleu*, dual du cuboctaèdre lui-même *en noir*. *A droite*, le dodécaèdre rhombique avec ses 12 faces qui sont toutes des losanges identiques.

Exercice 2 : Le dodécaèdre rhombique, dual du cuboctaèdre. Dimensions des faces en forme de losanges et hauteur des pyramides accolées à l'octaèdre régulier sous-jacent.

1) *Construire le cuboctaèdre en tronquant fortement un cube de côté de longueur 2. Calculer la longueur a de ses arêtes, ainsi que le rayon* R_i *de la sphère intermédiaire de centre O.*

Avec les côtés du cube de longueur 2, une arête du cuboctaèdre comme [*AB*] sur la face haute a pour longueur $a = \sqrt{2}$ (*figure 31*). La sphère intermédiaire est notamment tangente à l'arête [*AD*] en son milieu *I*. Son rayon est [*OI*] et sa longueur est respectée sur la *figure 31 à droite*, d'où

$R_i^2 = 1 + 1/2 = 3/2$, et $R_i = \sqrt{3} / \sqrt{2}$.

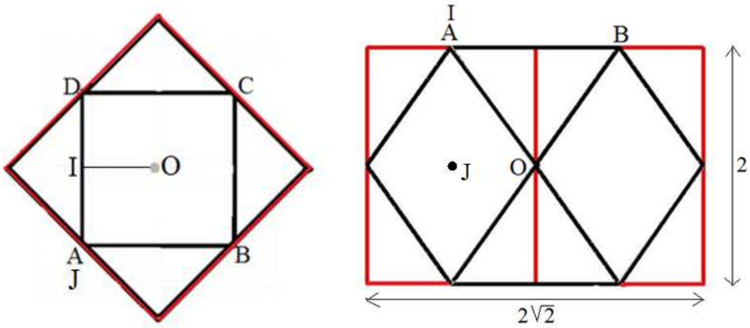


Figure 31 : Vue de haut *à gauche* et vue de profil *à droite* du cuboctaèdre *en noir*, et du cube *en rouge*.

2) *Déterminer les sommets du polyèdre dual qui sont les images des 6 faces carrées du cuboctaèdre. En joignant ces sommets, quel est le polyèdre régulier obtenu ?*

Les projections du centre O sur les faces carrées du cuboctaèdre se font en leurs centres, tous situés à une distance unité de O. Prenons le centre J d'une face carrée. Par dualité, le plan de la face devient un point J' sur $[OJ]$ tel que $OJ\ OJ' = R_i^2$, soit $OJ' = 3/2$. On obtient ainsi 6 sommets du polyèdre dual.

Comme les faces carrées du cuboctaèdre sont dans les mêmes plans que les faces du cube originel, la joinction de ces 6 sommets donne le dual du cube, à savoir un octaèdre régulier. Mais comme les faces carrées du cuboctaèdre ne sont pas adjacentes, les arêtes de l'octaède ne sont pas des arêtes du polyèdre dual.

3) *Déterminer les sommets du polyèdre dual qui sont associés aux 8 faces triangulaires du cuboctaèdre.*

Le point O se projette sur les faces triangulaires en leur centre de gravité. Considérons une face et son centre de gravité K. La droite (OK) passe par le sommet correspondant E du cube (*figure 32*). Une médiane du triangle mesure $a\sqrt{3}/2 = \sqrt{3/2}$, d'où $TK = (2/3)\ \sqrt{3/2} = \sqrt{2/3}$. Dans le triangle rectangle OKT, $OK^2 = 2 - 2/3 = 4/3$, et $OK = 2/\sqrt{3}$. Par dualité, la face RST devient le sommet K' du dual, situé sur $[OK]$ et tel que $OK\ OK' = R_i^2$, $OK' = (3/2)\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/4$. Avec $OE = \sqrt{3}$, on obtient : $\mathbf{OK'} = 3\sqrt{3}/4\ \mathbf{OE}/\sqrt{3} = (3/4)\ \mathbf{OE}$.

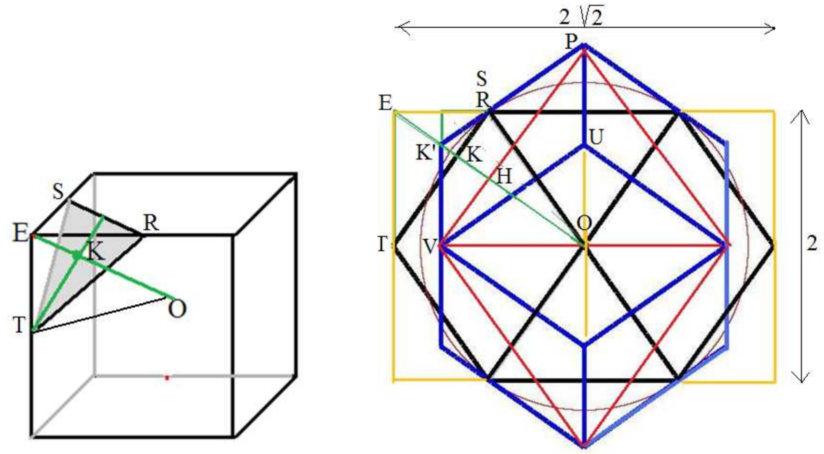


Figure 32 : *A gauche* vue en perspective d'une face triangulaire *RST* du cuboctaèdre et de son centre *K*, *à droite* vue de profil du cube *en jaune*, du cuboctaèdre *en noir*, de son dual *en bleu*, et de l'octaèdre sous-jacent *en rouge*.

4) *Déterminer la longueur a' des côtés du dodécaèdre thombique, dual du cuboctaèdre.*

On a vu que $OK' = (3/4)\ OE$, d'où $VK' = 3/4$ et $OV = 3/4\ \sqrt{2}$ (*figure 32 à droite*). Sur cette même figure le losange ayant pour sommets U et V a ses dimensions respectées, OV est une demi-diagonale et $OU = VK'$ est l'autre demi-diagonale, soit $a'^2 = VU^2 = 27/16$, et $a' = 3\sqrt{3}/4$. En appelant α le petit angle du losange, on a $\tan(\alpha/2) = 1/\sqrt{2}$ et $\alpha = 2\ \mathrm{Arctan}(1/\sqrt{2})$.

5) Reprendre l'octaèdre obtenu au 2° dont les sommets sont six des sommets du dodécaèdre rhombique et dont les arêtes sont des diagonales des losanges de ce polyèdre. Les 8 autres sommets sont chacun équidistants de trois sommets d'une face de l'octaèdre (figure 33). Ils sont donc les pointes de pyramides droites accolées au tétraèdre. Déterminer la hauteur h de ces pyramides.

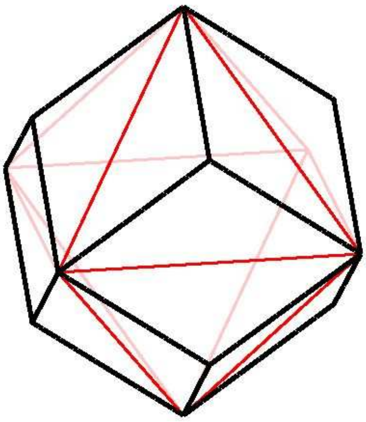


Figure 33 : Le dodécaèdre rhombique *en noir*, et l'octaèdre régulier sous-jacent *en rouge*.

En reprenant les notations de la *figure 32*, la distance de *O* à une face de l'octaèdre est *OH*, hauteur du triangle rectange *OVP*. Avec *OP* = 3/2, *OV* = 3/4 $\sqrt{2}$ et par suite *VP* = $3\sqrt{3}\,/\,(2\sqrt{2})$, on en déduit *OH* = *OV OP* / *VP* = 3/(2 $\sqrt{3}$) = $\sqrt{3}$/2. La hauteur d'une pyramide est *h* = *OK*' – *OH* = $3\sqrt{3}\,/\,4$ – $\sqrt{3}$/2 = $\sqrt{3}$/4 ≈ 0,433. Remarquons qu'on est dans un cas particulier : les faces des pyramides, lorsqu'elles sont accolées deux à deux, sont dans le même plan et donnent des faces en forme de losange.

Finalement, si l'on part d'un octaèdre régulier et qu'on accole des pyramides sur ses faces, on retrouve d'abord le triaki-octaèdre (*cf. exercice 1*), puis le dodécaèdre rhombique et enfin le polyèdre inscrit dans la sphère circonscrite à l'octaèdre. Plus précisément, le rapport de la hauteur de la pyramide sur la longueur d'un côté de l'octaèdre vaut 0,28/(2 $\sqrt{2}$) ≈ 0,099 pour le triaki-octaèdre, puis ($\sqrt{3}$ /4)/(3 $\sqrt{2}$ /2) = $1\,/\,(2\sqrt{6})$ ≈ 0,204 pour le dodécaèdre rhombique, et après projection sur la sphère 0,845//(2 $\sqrt{2}$) ≈ 0,299.

6.3.5. Les autres solides de Catalan

Pour les six solides d'Archimède restants, nous avons vu qu'il était nécessaire de modifier les troncatures ou de pratiquer des rotations entre faces opposées. Mais pour autant, le centre *O* de ces polyèdres se projette toujours sur le centre de gravité des faces, ce qui facilite la construction des solides de Catalan associés. Pour ces derniers, la principale nouveauté réside dans l'apparition de faces polygonales qui ne sont plus seulement des triangles particuliers ou des losanges.

6.3.5.1. Solides de Catalan dont les faces sont des triangles scalènes[9]

Le cuboctaèdre tronqué, de configuration (4 8 6) a pour dual l'hexaki-octaèdre dont les faces sont des triangles proches de triangles rectangles (*figure 34 en haut*). Tout comme l'icosidodécaèdre tronqué de configuration (10 4 6) qui a pour dual l'hexaki-icosaèdre, avec des faces elles aussi proches de triangles rectangles (*figure 34 en bas*). Lorsque l'on projette ces deux solides de Catalan sur une sphère, on obtient deux pavages sphériques par des triangles isométriques qui, eux, sont rectangles (*figure 34 à droite*).

[9] Un triangle scalène est un triangle dont les côtés ont des longueurs différentes.

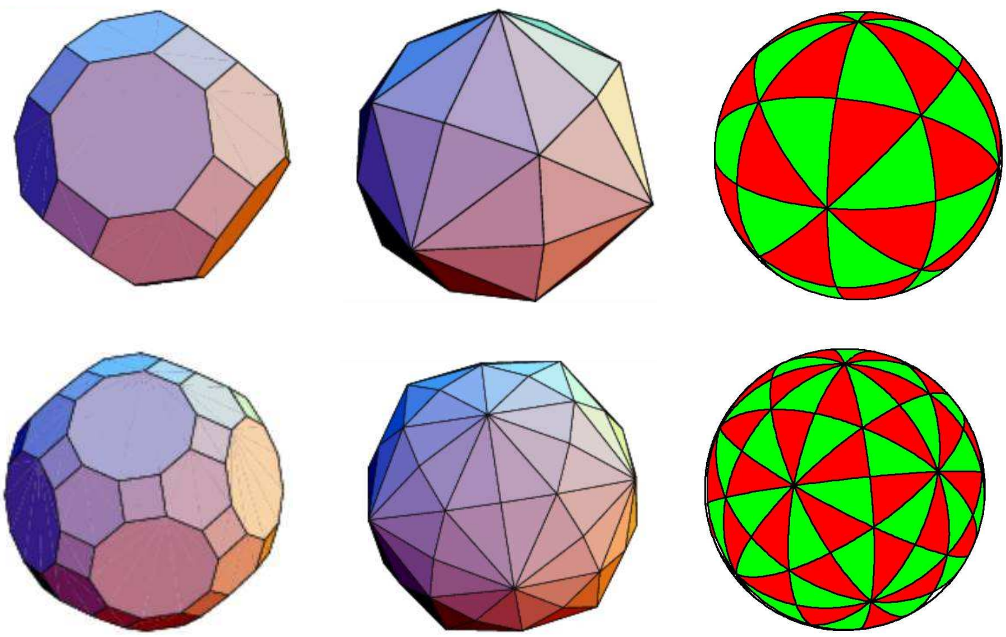


Figure 34 : *En haut*, le cuboctaèdre tronqué *à gauche* et son dual, le solide de Catalan appelé hexaki-octaèdre *au centre*. *En bas*, l'icosidodécaèdre tronqué et son dual l'hexaki-icosaèdre (dessins repris de *Wikipedia*). *A droite*, les pavages sphériques F_{48} et F_{120} associés aux solides de Catalan après leur projection sur une sphère.

6.3.5.2. Solides de Catalan dont les faces sont des quadrilatères en forme de cerf-volants

Le thombicuboctaèdre, solide d'Archimède de configuration (3 4 4 4) a pour dual l'icositétraèdre trapézoïdal avec des faces en forme de cerfs-volants, qui sont des quadrilatères formés de deux triangles isocèles accolés (*figure 35*). Tout comme le rhombicosidodécaèdre de configuration (5 4 3 4) qui a pour dual l'hexacontaèdre trapézoïdal avec des faces en forme de cerfs-volants aussi.

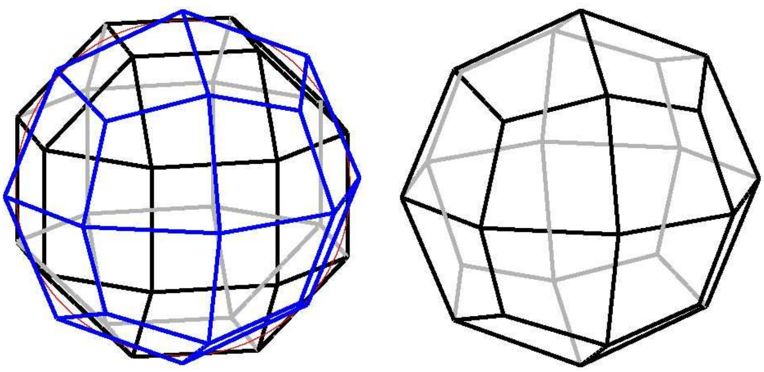


Figure 35 : *A gauche*, le rhombicuboctaèdre *en noir* et son dual, l'icositétraèdre trapézoïdal *en bleu*. *A droite,* l'icositétraèdre trapézoïdal avec ses 24 quadrilatéres en forme de cerfs-volants.

Nous allons traiter précisément le cas de l'icositétraèdre trapézoïdal sous forme de l'exercice suivant.

Exercice 3 : Le rhombicuboctaèdre et son dual l'icositétraèdre trapézoïdal

Pour construire le rhombicuboctaèdre, nous allons considérer qu'il est formé d'anneaux de huit carrés adjacents, en forme d'octogones réguliers, un anneau étant horizontal et les deux autres verticaux.

1) Prendre un cube de côté de longueur 2, et y inscrire le rhombicuboctaèdre de façon que six de ses carrés soient insérés dans les faces du cube. En utilisant les vues de haut et de profil du rhombicuboctaèdre, déterminer la longueur a de ses arêtes ainsi que le rayon R_i de sa sphère intermédiaire (figure 36).

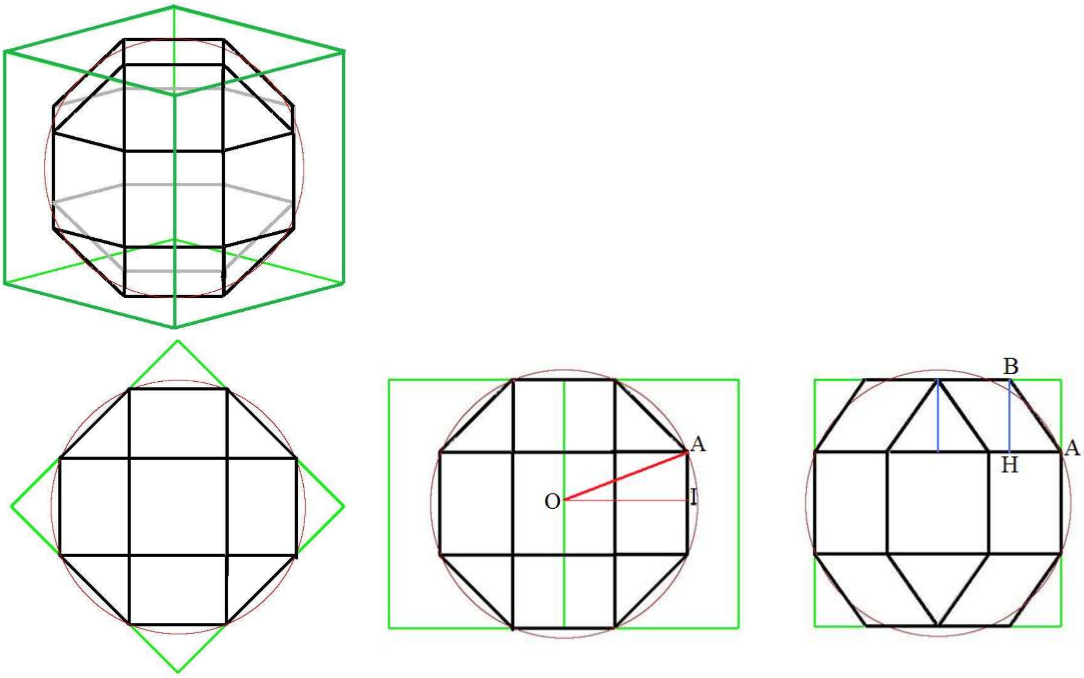


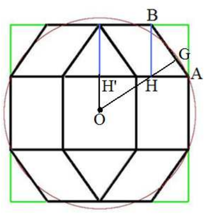
Figure 36 : *En haut*, le rhombicuboctaèdre inscrit dans le cube *en vert*. *En bas de gauche à droite*, une vue de haut et deux vues de profil.

Considérons par exemple la vue du haut, avec l'octagone régulier inscrit dans un carré du cube. Sur un côté, on doit avoir $a + a\sqrt{2} = 2$, soit $a = 2(\sqrt{2} - 1)$. En utilisant une vue de profil, le rayon de la sphère intermédiaire est $R_\mathrm{i} = OA$. Avec $IA = a/2 = \sqrt{2} - 1$ et $OI = a/2 + a\sqrt{2}/2 = 1$, on obtient $R_\mathrm{i}^2 = 1 + a^2/4, = 4 - 2\sqrt{2}$.

***2)** Déterminer les angles dièdres entre deux carrés adjacents et entre un carré et un triangle équilatéra adjacentsl.*

Entre deux carrés, l'angle est celui de l'octogone régulier, soit 90 + 45 = 135°. Pour l'angle séparant un carré et un triangle, utilisons la vue de profil à droite de la *figure 35*, où cet angle est respecté. Dans le triangle *ABH*, on a $BH = a\sqrt{2}/2$ et $AH = a/2$, et l'angle *A* du triangle est tel que tan*A* $= \sqrt{2}$, soit $\hat{A} \approx 54{,}7°$. L'angle entre un carré et un triangle adjacent vaut 144,7°.

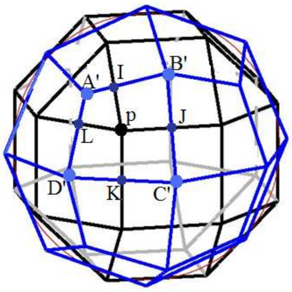
3) Le centre O se projette évidemment sur les centres des faces carrées. Mais vérifier qu'il se projette aussi sur les centres des faces triangulaires.



Le point *H* se projette en *G* sur (*AB*). D'autre part la droite (*OH*) fait un angle avec la verticale dont la tangente vaut $H'H / OH' = (1 - a/2)/(a/2) = \sqrt{2}$, tou comme l'angle *A* du triangle *ABH*. Cela prouve que (*OH*) est perpendiculaire à (*AB*), ou encore que les points *O*, *H*, *G* sont alignés. Il reste à montrer que *G* est au tiers de [*AB*] à partir de *A* :

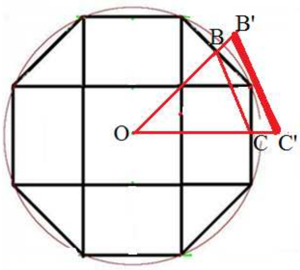
$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 3\,a^2/4$; $AB = a\sqrt{3}/2$, et $AG = AH \cos A = (a/2)/\sqrt{3}$ car avec $\cos^2 A = 1\,(1 + \tan^2 A)$ on trouve $\cos A = 1/\sqrt{3}$. Finalement, $AG = (1/3)\,AB$. Le point *O* se projette bien au centre du triangle équilatéral qui est une face du rhombicuboctaèdre.

***4)** Pourquoi les faces du polyèdre dual sont-elles des quadrilatères plans en forme de cerfs-volants?*



Prenons un sommet P du polyèdre d'Archimède. Pae dualité polaire, il est transformé en un plan (Q) dans lequel s'inscrit une face du polyèdre de Catalan. A leur tour, les faces qui entourent le sommet P sont transformées en points, A', B', C', D' sur le dessin ci-contre. Cela prouve que le quadrilatère formé par ces points est plan, ce plan étant (Q). On sait aussi que les arêtes du dual coupent les arêtes du polyèdre d'Archimède au milieu de ces dernières, soit I, J, K, L. Les sommets A', B', C', D' du dual sont les pointes de pyramides droites dont les bases sont délimitées par les mileiux des faces du polyèdre originel. On en déduit que $A'I = A'L$, $B'I = B'J$, etc. Donc $A'B' = A'D'$ et $C'B' = C'D'$.

***5)** Calculer la longueur des grands côtés des faces du dual, comme B'C' sur le dessin ci-dessus*[10].



En utilisant le dessin ci-contre, les points B et C représentent les centres de deux faces carrées adjacentes du polyèdre d'Archimède. On sait que $OB = OC = 1$. On a $BC = 2 \cos \pi/8 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Les inverses de B et C par rapport à la sphère intermédiaires sont B' et C' tels que $OB' = OC' = R_i^2$, B' et C' étant deux sommets adjacents du polyèdre dual. On en déduit que $B'C'$est la longueur d'un grand côté du cerf-volant, avec :

$$B'\,C' = R_i^2\,BC = (4-2\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Quant à l'autre solide de Catalan à faces en cerfs-volants, on se contentera de donner son dessin sur la *figure 37*.

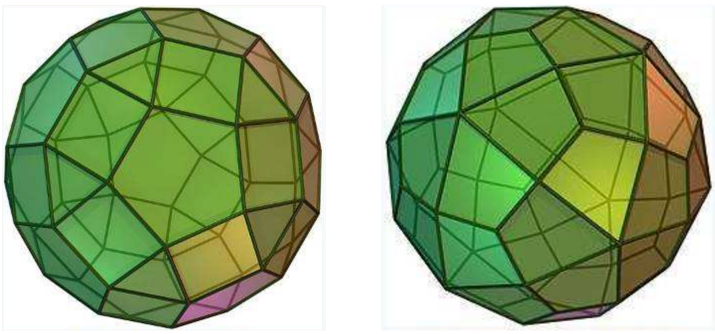


Figure 37 : *A gauche* le rhombicosidodécaèdre et *à droite* son dual, l'hexacontaèdre trapézoïdal.

6.3.5.3. Solides de Catalan à faces pentagonales

Le cube adouci et le dodécaèdre adouci sont des solides d'Archimède qui ont des configurations de sommets respectives (33334) et (33335) de longueur 5. Ils donnent donc naissance à des solides de Catalan dont les faces sont des pentagones.

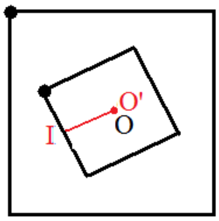
Le dual du cube adouci est l'icositétraèdre pentagonal (*figure 38*), et celui du dodécaèdre adouci est l'hexacontaèdre pentagonal (*figure 39*). Nous donnons quelques précisions sur le cube adouci et son dual dans l'exercice suivant.

[10] Pour le petit côté, plus difficile à calculer, on trouvera le résultat dans *Wolfram Math World*.

Exercice 4 : Construction du cube adouci et de son dual

Partons d'un cube de côtés de longueur 2. Dans chacune de ses six faces carrées vont s'inscrire les six carrés du cube adouci. Nous admettrons que l'on passe des carrés du cube à ceux du cube adouci par une similitude dont le centre est le centre du carré, dont le rapport k est égal à 0,44, et l'angle est $\pm 16{,}5°$.[11] *Précisons que ces angles sont opposés pour les faces opposées, et qu'il existe deux formes de cubes adoucis qui sont le miroir l'un de l'autre. Il ne reste plus qu'à ajouter les 32 triangles équilatéraux entre ces carrés.*

1) *Calculer le rayon de la sphère intermédiaire.*



Utilisons la vue de haut ci-contre. Avec *O* centre de la sphère intermédiaire et *O'* centre d'un carré du cube, le théorème de Pythagore donne :

$OI^2 = OO'^2 + O'I^2 = 1 + r^2$ où *r* est le rapport de la similitude.

En appelant a la longueur d'une arête du cube adouci, on a aussi :

$OI^2 = 1 + a^2/4$,

OI étant justement le rayon de la sphère intermédiaire.

2) *Donner quelques précisions sur la forme des faces du polyèdre dual.*

Les faces du dual sont des pentagones. Comme un sommet du cube adouci est entouré de quatre triangles équilatéraux et d'un carré, les quatre sommets du dual associés aux triangles équilatéraux sont les sommets de pyramides identiques qui sont accolées aux triangles (*figure 38 au centre*). Il s'ensuit que les trois côtés du dual qui joignent ces pointes ont même longueur. Il en est de même pour les deux jonctions associées aux deux triangles adjacents au carré. Finalement une face pentagonale est formée d'un triangle isocèle accolé à un trapèze isocèle avec trois côtés de même longueur.

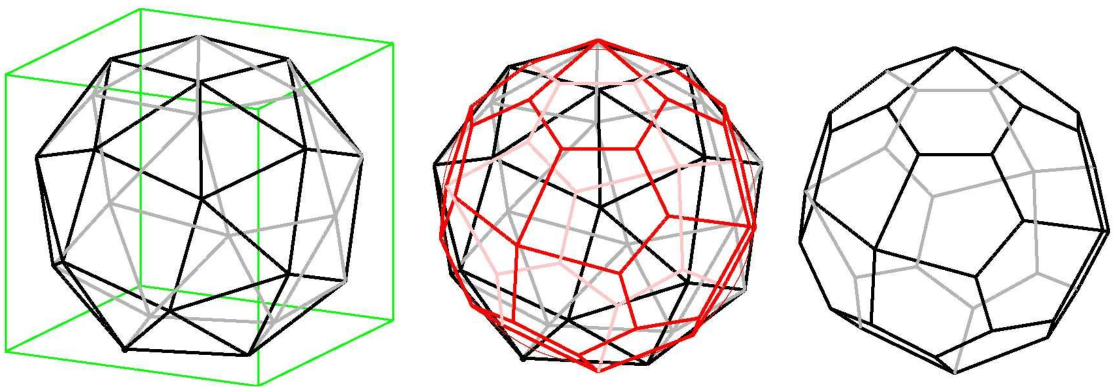


Figure 38 : Le cube adouci et son dual l'icositétraèdre pentagonal avec ses 24 faces pentagonales.

[11] Nous avons repris les indications données par R. Ferreol sur son site *MathCurve* à propos du cube adouci.

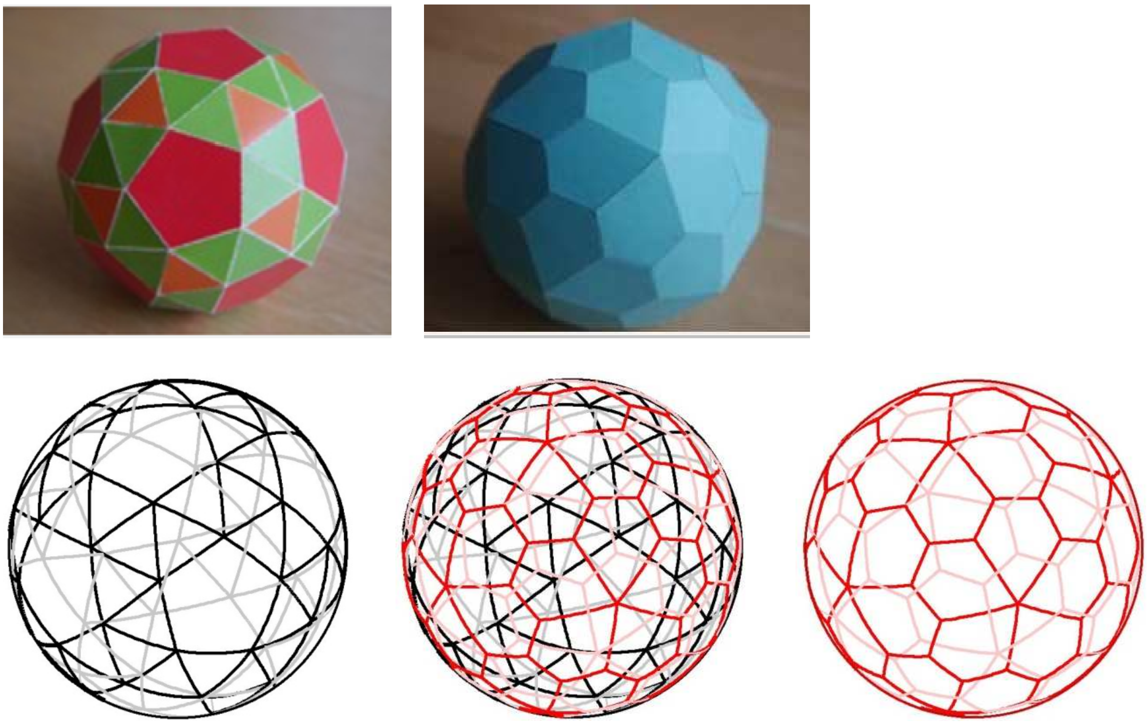


Figure 39 : *En haut à gauche* le dodécaèdre adouci et *à droite* son dual, l'hexacontaèdre pentagonal avec ses 60 faces pentagonales (figures extraites de *Stella*, *Archimedean solids and Catalan solids*). *En bas* les mêmes (réalisation personnelle).