

# Méthode de Newton-Héron et ses fractales

La méthode de Newton sert à trouver rapidement des valeurs approchées des zéros d'une fonction. Elle doit autant à Newton qu'à ses contemporains Raphson ou Simpson dans les années 1700. En fait, l'initiateur de la méthode est Héron d'Alexandrie (années -150) et il existe peut-être d'autres précurseurs égyptiens ou babyloniens avant lui, du moins pour trouver les zéros du polynôme  $x^2 - a$ , c'est-à-dire pour obtenir une bonne approximation de  $\sqrt{a}$ . A l'origine, cette méthode s'applique aux fonctions réelles à variable réelle ( $x \in \mathbf{R}$ ), mais elle peut s'étendre aux nombres complexes, avec de belles fractales en prime.

## 1. Méthode des tangentes pour avoir la valeur approchée d'une solution d'une équation dans $\mathbf{R}$

Pour obtenir la valeur approchée d'un nombre réel, un moyen consiste à utiliser une équation dont ce nombre est solution. Supposons par exemple que l'on veuille connaître une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  avec un certain nombre de chiffres exacts derrière la virgule. C'est justement ce genre de problème qui fut traité par Héron d'Alexandrie.

Le nombre  $\sqrt{2}$  est la solution positive de l'équation  $x^2 - 2 = 0$ . C'est même la seule solution sur l'intervalle  $[1, 2]$ . Le nombre  $\sqrt{2}$  est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des  $x$  et de la courbe d'équation  $y = x^2 - 2$  sur  $[1, 2]$ , qui est un morceau de parabole. En posant  $f(x) = x^2 - 2$ , on est dans le contexte où la dérivée  $f'(x)$  est positive et  $f''(x)$  aussi sur  $[1, 2]$ . Cela signifie que la fonction est croissante, et que sa dérivée est aussi croissante. Ainsi la pente de la tangente augmente quand  $x$  augmente, la courbe a une forme de cuvette (*figure 1*). On dit dans ce cas que la fonction est convexe.

On va construire une suite  $(u_n)$  de points sur l'axe des  $x$ , qui vont s'approcher de  $\sqrt{2}$  rapidement, grâce à ce que l'on appelle la méthode des tangentes.

On part de  $u_0 = 2$  (*sur la figure 1 on est parti de  $u_0 = 3$  pour mieux voir*), puis on prend le point de la courbe correspondant, de coordonnées  $(u_0, f(u_0))$ . A partir de ce point on trace la tangente à la courbe. Cette tangente coupe l'axe des  $x$  en  $u_1$ . Puis on recommence, en remontant verticalement sur la courbe, et en traçant la tangente qui va couper l'axe des  $x$  en  $u_2$ , etc.

Comment passe-t-on dans le cas général de  $u_n$  à  $u_{n+1}$ ? La tangente à la courbe au point d'abscisse  $u_n$  passe par le point  $(u_n, f(u_n))$  et a pour pente  $f'(u_n)$ . Son équation est :  $Y - f(u_n) = f'(u_n)(X - u_n)$ . On fait  $Y = 0$  pour avoir l'abscisse  $X = u_{n+1}$  du point d'intersection avec l'axe des  $x$ , d'où  $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

ou encore :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Dans le cas présent, cela donne <sup>1</sup> :

---

<sup>1</sup> Précisons que si Héron d'Alexandrie arrive exactement à cette même relation, ce n'est pas du tout en utilisant des tangentes à une courbe. Le nombre  $\sqrt{2}$  est le côté d'un carré d'aire égale à 2. L'objectif est d'arriver à ce carré. Pour cela on part d'un rectangle de longueur  $u_0$  et de largeur  $2/u_0$  qui a aussi pour aire 2. Puis on remplace  $u_0$  par la moyenne arithmétique des deux côtés du rectangle précédent, d'où la nouvelle longueur  $u_1 = (u_0 + 2/u_0)/2$  et la nouvelle largeur  $2/u_1$ . Puis l'on recommence, soit  $u_2 = (u_1 + 2/u_1)/2$ , etc., et les rectangles successifs obtenus

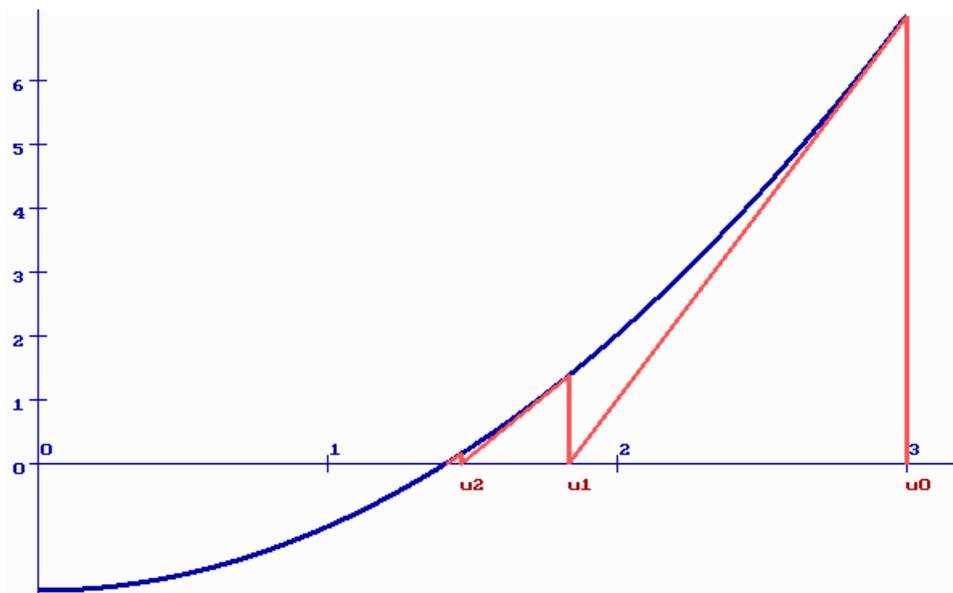


Figure 1 : Méthode des tangentes pour s'approcher rapidement de la racine  $\sqrt{2}$  de  $x^2 - 2$ .

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

La suite  $(u_n)$  obéit à la relation de récurrence  $u_{n+1} = g(u_n)$  avec  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$ , et en condition initiale  $u_0 = 2$ . On constate graphiquement que cette suite converge vers  $\sqrt{2}$  très rapidement.

A titre d'exercice faisons une étude théorique de cette suite.

**Exercice 1 : Etude de la relation de récurrence**  $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$  avec  $f(x) = x^2 - 1$

1) Etudier la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^*_{+}$ .

Avec  $x > 0$ , la division  $2/x$  est toujours possible,  $g(x)$  existe bien pour tout  $x > 0$ .

Passons aux limites :

- Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $2/x$  tend vers 0,  $g(x) \approx x/2$  tend vers  $+\infty$ . Pour étudier cette branche infinie, on constate que  $g(x) - (1/2)x = 2/(2x)$  qui tend vers  $0+$ . Cela prouve que la droite d'équation  $y = (1/2)x$  est une asymptote oblique pour la courbe de  $g$ , et que la courbe est située au-dessus.
- Lorsque  $x$  tend vers  $0+$ ,  $2/x$  tend vers  $+\infty$ , et  $g(x)$  tend vers  $+\infty$ . La courbe admet l'axe des  $y$  comme asymptote verticale.

Cherchons la dérivée :  $g'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 2}{x^2}$ . Elle est du signe de :

$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$  qui est du signe de  $(x - \sqrt{2})$ . D'où les variations de  $g$  :

Sur  $]0, \sqrt{2}]$ , la fonction décroît de  $+\infty$  à  $\sqrt{2}$ , et sur  $[\sqrt{2}, +\infty[$  elle croît de  $\sqrt{2}$  à  $+\infty$ . On a partout  $g(x) \geq \sqrt{2}$ .

---

s'approchent rapidement de la forme carrée de côté  $\sqrt{2}$ . La méthode des tangentes n'est qu'une vision différente du même problème, avec la même relation de récurrence.

2) Etude de la suite  $(u_n)$  avec  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Montrer que pour tout  $x$  dans l'intervalle  $[\sqrt{2}, 2]$ , on a  $0 \leq g'(x) \leq 1/4$ .

On sait que  $g'(\sqrt{2}) = 0$ . Lorsque  $x$  augmente à partir de là,  $2/x^2$  diminue,  $-2/x^2$  augmente, donc la dérivée augmente. Avec  $g'(2) = 1/4$ , cela signifie que la dérivée va de 0 à 1/4. On a bien  $0 \leq g'(x) \leq 1/4$ .

b) Montrer que pour tout  $n$ ,  $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ .

Faisons un raisonnement par récurrence.

- La propriété est vraie au départ :  $u_0 = 2 \leq 2$  et  $\geq \sqrt{2}$ .
- Supposons la propriété vraie à un certain rang  $n$  et montrons qu'elle reste vraie au rang  $n + 1$  : avec  $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$  par hypothèse de récurrence, et  $g$  croissante sur  $[\sqrt{2}, +\infty[$ , on en déduit que  $g(\sqrt{2}) \leq g(u_n) \leq g(2) = 3/2 \leq 2$ , soit

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$$

c) Montrer que  $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}(u_n - \sqrt{2})$ .

Plaçons-nous sur l'intervalle  $I = [\sqrt{2}, 2]$ , où l'on a vu que  $0 \leq g'(x) \leq 1/4$ . D'où :

$|g'(x)| \leq 1/4$ . Les nombres  $\sqrt{2}$  et  $u_n$ , comme on l'a vu, sont dans  $I$ . On est alors dans les conditions de l'inégalité des accroissements finis :

$|g(u_n) - g(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$  ou  $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$ . Et comme  $u_n \geq \sqrt{2}$  pour tout  $n$ , on peut supprimer les barres :  $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}(u_n - \sqrt{2})$ .

d) Montrer que  $u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$ . En déduire la convergence de la suite et indiquer sa limite.

$$u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}(u_{n-1} - \sqrt{2})$$

$$u_{n-1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}(u_{n-2} - \sqrt{2})$$

.....

$$u_1 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}(u_0 - \sqrt{2})$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, où tout est positif, il se produit des simplifications en cascade, et il reste :  $u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$ .

On a aussi l'encadrement  $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $u_n - \sqrt{2}$  est pris en tenaille entre 0 et une quantité qui tend vers 0, d'où  $u_n$  tend vers  $\sqrt{2}$ . Le terme  $\left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$  indique que la convergence est relativement rapide. Pour  $n = 6$ , on a déjà  $0 \leq u_6 - \sqrt{2} \leq 0,00015$ .

e) Faire un diagramme en toile d'araignée pour observer la vitesse de convergence que laissait présager la question précédente.

Le dessin du diagramme, à partir de la courbe de la fonction  $g$ , indique effectivement la vitesse de convergence de la suite vers  $\sqrt{2}$  (figure 2). Cette rapidité s'explique par le fait qu'au point fixe  $\sqrt{2}$ , la courbe de  $g$  admet une tangente horizontale<sup>2</sup>.

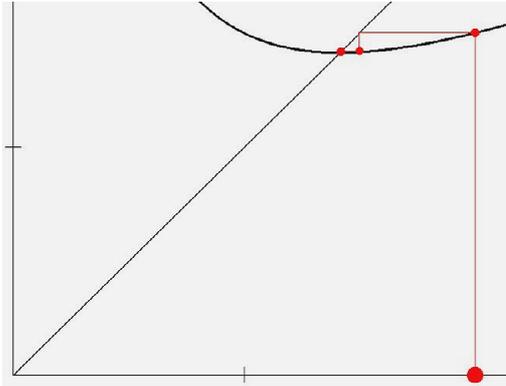


Figure 2 : Diagramme en toile d'araignée associé à la suite telle que  $u_{n+1} = g(u_n)$  à partir de  $u_0 = 2$ .

f) Nous allons montrer maintenant que la vitesse de convergence est bien meilleure que ne le laissait croire la question d). Pour cela, commencer par montrer que sur  $[\sqrt{2}, 2]$ ,  $g(x) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}$  puis que  $g(x) - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \sqrt{2})^2$ . En déduire que  $u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n - 1} (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$ . Avec  $u_0 = 2$ , quel est le degré de précision du terme  $u_3$  par rapport à  $\sqrt{2}$  ?

$$g(x) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} = \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x}{2x} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \sqrt{2})^2 \text{ puisque } x \geq \sqrt{2}.$$

Revenons à la suite  $(u_n)$ , avec  $u_k = g(u_{k-1})$ . On obtient cette suite d'inégalités :

$$u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(u_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

$$u_{n-1} - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(u_{n-2} - \sqrt{2})^2$$

...

$$u_1 - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(u_0 - \sqrt{2})^2$$

Commençons par élever l'inégalité de la deuxième ligne à la puissance 2, la troisième ligne à la puissance 4, la quatrième à la puissance 8, etc., et la dernière ligne à la puissance  $2^{n-1}$ . Les inégalités sont préservées puisque tout est positif. Puis en multipliant membre à membre ces inégalités, où tout est positif, il se produit des simplifications en cascade et il reste :

$$u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{1+2+4+8+\dots+2^{n-1}} (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}, \text{ soit } u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n - 1} (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

<sup>2</sup> Dans le cas où le point, ici  $\sqrt{2}$ , est tel que la dérivée de la fonction en ce point est nulle, on dit qu'il est super-attracteur.

Prenons le terme  $u_3$ . Grâce à l'inégalité précédente il vérifie :

$u_3 - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^7 (2 - \sqrt{2})^8$ , soit  $u_3 - \sqrt{2} \leq 0,00001$ . Après trois itérations, on trouve déjà une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  avec au moins 4 chiffres exacts derrière la virgule, soit 1,4142.

Ce que nous avons fait avec le polynôme  $x^2 - 2$  et sa racine  $\sqrt{2}$ , nous allons le généraliser à une fonction réelle  $f(x)$  en utilisant toujours la méthode des tangentes. Comme nous l'avons vu, cela nous amène à introduire ce que l'on appelle la fonction de Newton  $N$  associée à  $f$ , soit

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ puis à pratiquer la récurrence } u_{n+1} = N(u_n) \text{ à partir de } u_0.$$

Remarquons qu'une solution  $x^*$  de  $f(x) = 0$  est aussi bien un point fixe de  $N$ , c'est-à-dire que  $x^*$  vérifie  $N(x) = x$ .

Il reste à voir sous quelles conditions la suite  $(u_n)$  va converger vers une solution  $x^*$  de  $f(x) = 0$ .

## 2. Propriété 1 : Conditions fortes de convergence de la méthode de Newton

Nous allons prendre des hypothèses fortes pour s'assurer que la suite  $(u_n)$  converge vers une racine  $x^*$  de l'équation  $f(x) = 0$ , ce qui sous-entend que  $x^*$  existe.

Plaçons-nous dans  $I = [x^*, b]$  avec  $b > x^*$ , intervalle sur lequel la fonction  $f(x)$  est supposée deux fois dérivable, avec plus précisément  $f'(x^*) > 0$  et d'autre part  $f''(x) > 0$  pour tout  $x$  sur  $I$ , ce qui signifie que la fonction est convexe.<sup>3</sup>

Cela entraîne que la dérivée  $f'$  est croissante et reste positive sur  $I$ . Il s'ensuit que la fonction  $f$  est aussi croissante et positive sur  $]x^*, b]$  et que la fonction de Newton associée  $N(x)$  est bien définie (puisque  $f'(x) \neq 0$ ) et dérivable sur  $I$ .

Comme  $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  avec  $f(x) \geq 0$  et  $f'(x) > 0$ , on en déduit que  $N(x) \leq x$  sur  $I$  et même  $N(x) < x$  sur  $]x^*, b]$ .

Appliquons maintenant l'égalité de Taylor-Lagrange jusqu'au second ordre, sur  $I$ . Cela veut dire qu'il existe un nombre  $c$  sur  $]x^*, b[$  tel que l'on ait :

$$f(x^*) - f(x) = (x^* - x) f'(x) + (x^* - x)^2 f''(c) / 2 \text{ sur } I. \text{ On en déduit que :}$$

$$N(x) - x^* = x - x^* - f(x) / f'(x) = (x - x^*) f'(x) - f(x) / f'(x) = (x^* - x)^2 f''(c) / (2 f'(x))$$

Comme  $f''(c) > 0$ ,  $N(x) - x^* \geq 0$  sur  $I$ , et même  $N(x) - x^* > 0$  sur  $]x^*, b]$ .

Finalement  $x^* < N(x) < x$  sur  $]x^*, b]$ .<sup>4</sup>

Prenons  $u_0$  dans  $]x^*, b]$ . Alors  $N(u_0) = u_1$  est aussi dans  $]x^*, b]$ , et par récurrence évidente,  $u_n$  est dans  $]x^*, b]$ . On en déduit que  $(u_n)$  est minorée par  $x^*$ , et comme  $N(x) < x$  sur ce même intervalle, on a  $u_{n+1} <$

<sup>3</sup> Il existe d'autres cas de figure qui reviennent au même, par exemple  $f'(x^*) < 0$  et  $f'' < 0$  sur  $I$  (cas symétrique par rapport à  $Ox$  du cas étudié). Ou encore sur l'intervalle  $[b, x^*]$  avec  $b < x^*$ ,  $f'(x^*) < 0$  et  $f'' > 0$  (cas symétrique par rapport à  $Oy$  du cas étudié), ainsi que le cas symétrique par rapport à  $Ox$  :  $f'(x^*) > 0$  et  $f'' < 0$ .

<sup>4</sup> Si l'on prend  $x = x^*$ , on retrouve le point fixe  $x^*$  avec  $N(x^*) = x^*$ . La suite  $(u_n)$  démarrant en  $x^*$  est constante.

$u_n$ , la suite est décroissante et même strictement. Décroissante et minorée, la suite converge, et sa limite est un point fixe, donc c'est  $x^*$ .

Pour constater la vitesse de convergence, prenons le maximum de  $f''$  sur  $I$ , soit  $M$  et le minimum de  $f'$  soit  $f'(x^*)$ . L'égalité précédente  $N(x) - x^* = (x^* - x)^2 f''(c) / (2f'(x))$  devient :

$$N(x) - x^* \leq \frac{M}{2f'(x^*)} (x^* - x)^2 \text{ de la forme } N(x) - x^* \leq K (x^* - x)^2. \text{ En procédant comme dans}$$

l'exercice 1 (question f) on trouve :

$$u_n - x^* \leq K^{2^n - 1} (u_0 - x^*)^{2^n}$$

### Exemples :

- $f(x) = x^2 - a$  avec  $a > 0$ , et sa racine positive  $x^* = \sqrt{a}$ . Nous avons traité le cas où  $a = 2$  dans l'exercice 1. Dans le cas général on peut se placer dans l'intervalle  $I = [\sqrt{a}, a + 1]$ . Pourquoi choisir la borne  $a + 1$  ? Parce que l'on a toujours  $a + 1 > \sqrt{a}$  comme on peut le vérifier en étudiant la fonction  $h(x) = x - \sqrt{x} + 1$ . La fonction  $f$  sur  $I$  obéit aux conditions imposées, et la suite  $(u_n)$  converge rapidement vers  $\sqrt{a}$ .

- $f(x) =$  polynôme de degré  $n$  au moins égal à 2, sous réserve qu'il admette au moins une racine. S'il existe plusieurs racines, on prend la plus grande  $x^*$ . On sait que la fonction polynomiale admet une branche parabolique lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Dans ces conditions, si la racine  $x^*$  se trouve dans la zone où la courbe a une forme parabolique, on est dans les conditions imposées, et en partant de  $u_0 > x^*$ , la méthode de Newton assure la convergence rapide vers  $x^*$ . Il en est de même pour la racine la plus petite.

Par exemple, prenons  $f(x) = 0,05 x^5 + 0,1 x^4 - 0,8 x^3 - 1,8 x^2 + 0,5$ . Le tracé de la courbe représentative indique la présence de 5 racines. Les deux racines extrêmes sont rapidement obtenues par la méthode de Newton, la plus grande en partant de  $u_0$  supérieur à elle, la plus petite en partant de  $u_0$  inférieur à elle (figure 3). Remarquons aussi que la courbe nous indique dans quelles zones choisir les valeurs initiales  $u_0$  pour trouver des valeurs approchées des racines intermédiaires.

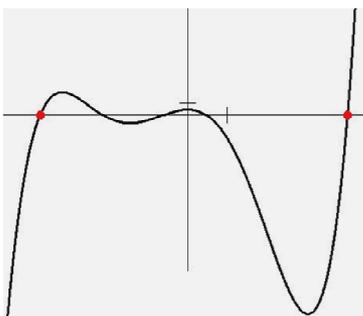


Figure 3 : Courbe correspondant à un polynôme de degré 5, avec ses deux racines extrêmes (points rouges) facilement obtenues grâce à la méthode de Newton.

Mais il peut exister des hypothèses moins fortes qui nous assurent que la méthode de Newton fonctionne, sauf qu'il convient alors de prendre  $u_0$  suffisamment proche de la racine  $x^*$ , sans que la théorie nous indique où exactement. C'est l'objet de la propriété suivante.

### 3. Propriété 2 : Conditions de convergence pour $u_0$ suffisamment proche de la racine $x^*$

Voici les contraintes qui rendent viable la méthode de Newton, à condition d'être placé suffisamment près de la racine  $x^*$  :

Soit une fonction  $f$

- deux fois dérivable sur un intervalle  $I = [a, b]$ ,
- avec  $f''$  continue sur  $I$ ,
- avec un zéro  $x^*$  de  $f$  situé dans  $]a, b[$ ,
- et avec  $f'(x^*) \neq 0$ .

Alors pour un nombre  $u_0$  suffisamment proche de  $x^*$ , la suite obéissant à la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \text{ converge vers } x^*.$$

Démonstration<sup>5</sup> : Sans perte de généralité, on peut supposer que  $f'(x^*) > 0$ . Puisque  $f''$  existe,  $f'$  est continue sur  $I$ . Grâce à cette continuité de  $f'$  autour de  $x^*$ , il existe forcément un intervalle  $J$  centré sur  $x^*$  et inclus dans  $I$ , soit  $J = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ , où  $f'$  reste positive, et où la dérivée seconde qui est continue est aussi bornée :  $|f''| \leq M$ .

Sur cet intervalle  $J$  la fonction  $f$  est alors strictement croissante. Et comme  $f' > 0$  sur  $J$ , la fonction de Newton  $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  existe sur  $J$ , la division étant toujours possible.

$$\text{Avec } x \text{ dans } J, \text{ on a } N(x) - x^* = x - x^* - \frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{f(x) + (x^* - x)f'(x)}{f'(x)}$$

Cela nous invite à appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, entre  $x^*$  et  $x$  dans  $J$  où  $f$  a ses dérivées première et seconde continues, et  $|f''| \leq M$ . Cela s'écrit :

$$|f(x^*) - f(x) - (x^* - x)f'(x)| \leq \frac{(x^* - x)^2}{2} M \text{ avec dans le cas présent } f(x^*) = 0. \text{ Alors :}$$

$$|N(x) - x^*| \leq \frac{(x^* - x)^2}{2f'(x)} M$$

En appelant  $m$  la valeur minimale de  $f'(x)$ , on obtient :

$$|N(x) - x^*| \leq \frac{M}{2m} (x^* - x)^2, \text{ soit } |N(x) - x^*| \leq K(x^* - x)^2 \leq K\varepsilon^2$$

Quitte à réduire l'intervalle  $J$ , faisons en sorte que  $\varepsilon < 1/K$  (ou  $K < 1/\varepsilon$ ). Finalement :

$$|N(x) - x^*| < \varepsilon \text{ et } N(x) \text{ appartient à } J.$$

Avec  $u_0$  dans  $J$ , on a aussi  $u_1 = N(u_0)$  dans  $J$ , et par récurrence évidente  $u_n$  appartient à  $J$  pour tout  $n$ . Cela prouve que la suite  $(u_n)$  existe. D'autre part, on a vu que  $|N(x) - x^*| \leq K(x^* - x)^2$ , soit :

$$|u_n - x^*| \leq K(u_{n-1} - x^*)^2. \text{ On en déduit, comme on l'a déjà fait précédemment (cf. exercice 1) :}$$

$$|u_n - x^*| \leq K^{2^{n-1}} (u_0 - x^*)^{2^n}$$

$|u_n - x^*| \leq (K(u_0 - x^*))^{2^n} / K \leq (K\varepsilon)^{2^n} / K$ , avec  $K\varepsilon < 1$  comme on l'a supposé. Pris en tenaille entre 0 et une quantité qui tend vers 0 pour  $n$  infini,  $|u_n - x^*|$  tend vers 0 et  $u_n$  tend vers  $x^*$ .

<sup>5</sup> J'ai repris la démonstration donnée dans F. Bouguet, dans *méthode de Newton* sur Internet.

## 4. Exemples et contre-exemples dans $\mathbf{R}$

Que l'on soit ou pas dans les conditions de la propriété 2 précédente, la forme de la courbe représentative de  $f$  indique en général si la méthode de Newton peut s'appliquer ou pas, et où prendre  $u_0$  pour qu'elle convienne.

- $f(x) = x^p$  avec  $p$  entier supérieur à 1. On a la racine évidente  $x^* = 0$  où la dérivée est nulle. On n'est pas dans les conditions du théorème 2 précédent, mais la méthode de Newton fonctionne quand même sous réserve que l'on parte de  $u_0$  différent de 0, c'est-à-dire dans  $\mathbf{R}^*$ , ou si l'on préfère dans  $\mathbf{R}^{*+}$ , le cas  $\mathbf{R}^*$ - s'en déduisant à cause de la symétrie présentée par la courbe de  $f$ . En effet la fonction de Newton associée est  $N(x) = x - x^p / (p x^{p-1}) = (1 - 1/p) x = q x$  avec  $q$  strictement entre 0 et 1 puisque  $p > 1$ . La suite  $u_n$  est géométrique de raison  $q$ . En partant de  $u_0$  quelconque dans  $\mathbf{R}^{*+}$ , la suite converge vers 0, et de même pour  $u_0 < 0$ . Comme la suite converge vers  $x^* = 0$  quel que soit  $u_0 \neq 0$ , on dit que  $x^*$  a pour bassin d'attraction  $\mathbf{R}^*$ .

- $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$  prise sur  $\mathbf{R}^+$ . Pour la solution évidente  $x^* = 0$ , la dérivée est non nulle mais  $x^*$  n'est pas à l'intérieur d'un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}^+$ . Les conditions de la propriété 2 précédente ne sont pas réunies, et l'on constate effectivement que la méthode de Newton ne fonctionne pas. Cela se voit tout simplement car en partant de  $u_0$  dans  $\mathbf{R}^+$ , la tangente à la courbe en ce point coupe toujours l'axe des  $x$  en dehors de  $\mathbf{R}^+$  (figure 4 à gauche).

- $f(x) = \sqrt{|x|+1} - 1$  prise sur  $\mathbf{R}$ . On a la solution évidente  $x^* = 0$ , mais la fonction n'est pas dérivable en 0. On n'est pas dans les conditions de la propriété 2, mais on constate que la méthode de Newton fonctionne, la suite  $(u_n)$  convergeant vers 0 en oscillant autour, à partir de  $u_0$  quelconque dans  $\mathbf{R}^*$  (figure 4 à droite).

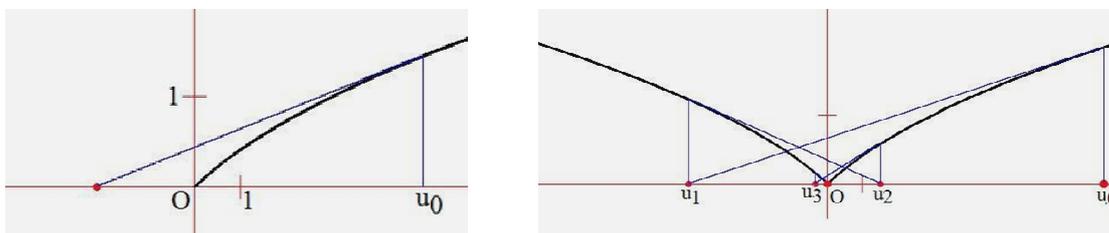


Figure 4 : A gauche la méthode de Newton ne marche pas pour  $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ . A droite, la méthode fonctionne pour  $f(x) = \sqrt{|x|+1} - 1$ .

- $f(x) = (x - 2)^3 + 2$ . La courbe de  $f$  présente un point d'inflexion en  $x = 2$  et elle coupe l'axe des  $x$  en un point unique  $x^*$  où la dérivée  $f'(x^*)$  est  $> 0$ . Sur l'intervalle  $]-\infty, 2[$ , la fonction est concave ( $f'' < 0$ ). Grâce à la propriété 1 précédente, la suite  $(u_n)$  avec  $u_0 < x^*$  converge vers  $x^*$ . On constate aussi qu'avec  $u_0$  dans  $]x^*, 2[$ ,  $u_1$  se retrouve dans la zone  $]-\infty, 2[$ , et la convergence a lieu aussi. Mais si l'on prend  $u_0 = 2$ , la tangente au point d'inflexion est horizontale, et  $u_1$  n'existe pas. Il en est de même pour tous les antécédents de 2 par la fonction de Newton  $N$ . Notamment si l'on prend  $u_0 = 3$ , on tombe sur  $u_1 = 2$ , et la suite n'existe pas. A son tour, le point  $u_0$  tel que  $u_1 = 3$  bloque la suite à  $u_2 = 2$ . Il en est ainsi pour tous les transformés de 2 par  $N^{-1}$ . Mais on peut observer qu'à part cette infinité de points, toutes les autres valeurs de  $u_0$  dans  $\mathbf{R}$  donnent une suite convergeant vers  $x^*$  (figure 5).

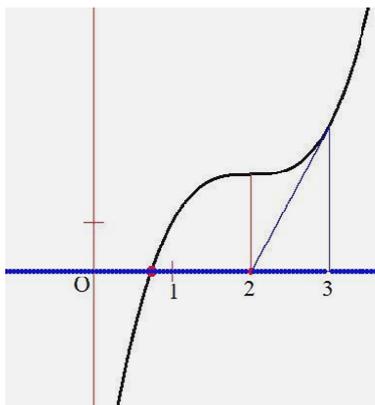


Figure 5 : Courbe d'équation  $y = (x - 2)^3 + 2$  coupant  $Ox$  en un point unique  $x^*$ . La méthode de Newton fonctionne à partir de toutes les valeurs de  $u_0$  de  $\mathbf{R}$  sauf pour 2 ainsi que ses antécédents, notamment 3.

•  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ . On constate (on peut aussi le prouver !) que la fonction admet deux extrema et qu'elle a un zéro unique  $x^*$  (figure 6). Sa fonction de Newton associée est

$$N(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2}{3x^2 - 8x + 2}$$

On observe aussi que la suite  $(u_n)$  converge vers  $x^*$  pour des valeurs initiales  $u_0$  occupant de façon dense l'axe  $Ox$ . Mais déjà, pour les deux extrema de la fonction obtenus pour  $x = (4 \pm \sqrt{10}) / 3$ , où la tangente est horizontale, ainsi que pour leurs antécédents par  $N$ , la suite  $(u_n)$  démarrant en l'un de ces points n'est pas définie. Pire : si l'on a la malencontreuse idée de démarrer en  $u_0 = 0$  ou 1, on constate que la suite ne cesse d'évoluer entre 0 et 1, sans jamais converger vers  $x^*$ . Cela signifie que la fonction de Newton  $N$  n'a pas seulement un point fixe, mais aussi un cycle fixe de deux points. Cet événement, finalement assez peu conséquent dans le cas présent avec des nombres réels, va jouer un rôle bien plus important dans le cas où nous allons utiliser des nombres complexes.

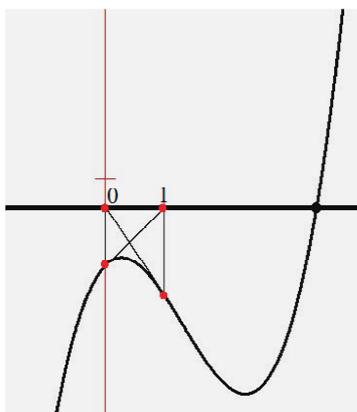


Figure 6 : Courbe de la fonction  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ . On constate que sous l'effet de la fonction de Newton associée :  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ . La fonction  $N$  admet, outre son point fixe, un cycle fixe de deux points 0 et 1.

## 5. Méthode de Newton dans le cadre des nombres complexes

Considérons une fonction  $f(z)$  avec  $z$  complexe, et associons-lui la transformation de Newton

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \text{ et la suite } (z_n) \text{ telle que } z_{n+1} = N(z_n) \text{ à partir de } z_0 \text{ donné.}$$

Parmi les fonctions  $f(z)$ , nous allons privilégier les polynômes de degré quelconque  $n$ , sachant qu'ils admettent  $n$  racines complexes. On appelle bassin d'attraction d'une racine  $Z$  l'ensemble des points

d'affixe  $z_0$  tels que la suite  $(z_n)$  converge vers elle. Notre objectif est de colorier les points  $z_0$  du plan complexe selon le bassin d'attraction de la racine complexe dans lequel ils se trouvent. Le cas des polynômes de degré 2 va s'avérer différent de celui des polynômes de degré supérieur à 2.

### 5.1. Transformation de Newton associée à un polynôme du second degré

Nous commençons par traiter deux cas particuliers simples, sous forme d'exercices, avant de généraliser.

#### **Exercice 2 : Etude de la transformation de Newton associée au polynôme $z^2 + 1$**

La transformation associée à  $z^2 + 1$  est  $N(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ .

1) Déterminer ses points fixes et vérifier qu'ils sont attracteurs.

Ils vérifient  $N(z) = z$ , soit  $z = \pm i$  et l'on retrouve les zéros de  $z^2 + 1$ . Avec  $N'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{z^2} \right)$ , on constate que  $N'(\pm i) = 0$ . Les points fixes sont attracteurs et même super-attracteurs.<sup>6</sup>

2) Etude expérimentale de la récurrence  $z_{n+1} = N(z_n)$  à partir d'un nombre  $z_0$  quelconque.

a) Déterminer les bassins d'attraction des deux points fixes. Que se passe-t-il si  $z_0$  est réel ? Quel est l'ensemble de Julia-Fatou<sup>7</sup> de la fonction  $N$  ?

Le tracé de quelques trajectoires indique qu'il y a convergence rapide vers les points d'affixe  $i$  ou  $-i$  (figure 7 à gauche). On constate aussi que les bassins d'attraction des deux points sont le demi-plan strictement au-dessus de  $Ox$  et le demi-plan strictement au-dessous (figure 7 à droite), et que si l'on part de  $z_0$  réel non nul, la fonction  $N$  n'étant pas définie en 0,<sup>8</sup> la trajectoire occupe de façon dense l'axe  $Ox$  en le parcourant de façon erratique.

L'axe des  $x$  constitue la fermeture de l'ensemble des points repousseurs de  $N$ . Il s'agit donc de l'ensemble de Julia-Fatou de  $N$ . Plus précisément cet ensemble de Julia-Fatou est l'axe des  $x$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels  $\mathbf{R}$ , avec le point  $\infty$  en plus, en définissant  $N$  sur  $\mathbf{C} \cup \infty$  (cf. note 7).

<sup>6</sup> Rappelons qu'un point fixe est attracteur si la valeur absolue de la dérivée en ce point est inférieure à 1. Et dans le cas limite où elle vaut 0, le point est même super-attracteur.

<sup>7</sup> Au début du 20<sup>e</sup> siècle, G. Julia et P. Fatou ont été des pionniers dans l'étude de la dynamique itérative des polynômes et des fonctions rationnelles complexes.

<sup>8</sup> Si l'on adjoint à l'ensemble des nombres complexes  $\mathbf{C}$  le nombre  $\infty$ , on a alors  $N(0) = \infty$  et  $N(\infty) = \infty$ . La fonction  $N$  est alors définie sur  $\mathbf{C} \cup \infty$  et a ses transformés dans  $\mathbf{C} \cup \infty$ . Ce « point »  $\infty$  peut être considéré comme formé des points qui sont au-delà d'un cercle centré en  $O$  et de rayon infiniment grand. Dès que le module d'un nombre complexe tend vers l'infini, quelle que soit la direction dans laquelle cela se produit, ce nombre tend vers  $\infty$ .

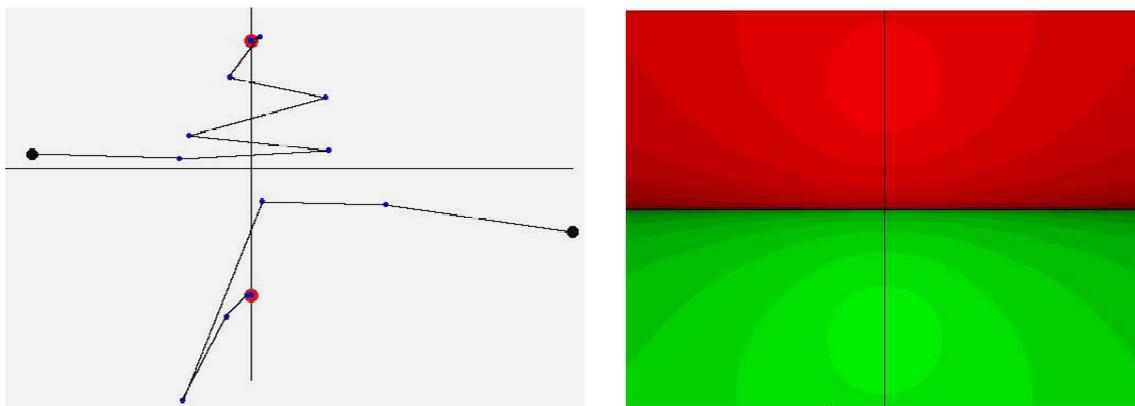


Figure 7 : A gauche, tracé de deux trajectoires, l'une à partir du point  $(-1,7, 0,1)$  convergeant vers  $i$   $(0, 1)$ , l'autre à partir du point  $(2,5, -0,5)$  convergeant vers  $-i$ , les points successifs étant joints par des segments. A droite, les deux bassins d'attraction de  $i$  en rouge et  $-i$  en vert.

Programme donnant les bassins d'attraction :

```
i.A=0.;i.B=1.; /* nombre i */
for(xe=100;xe<700;xe++) for(ye=100;ye<500;ye++) /* parcours d'un rectangle sur l'écran */
{ x=(double)(xe-xorig)/zoom; y=(double)(yorig-ye)/zoom; /* conversion en coordonnées calcul */
  z.A=x;z.B=y; /* nombre complexe z0 initial */
  for(j=1;j<15;j++) /* 15 itérations */
  {N=MULT(z,z); N=SOUSTR(N,un); D=MULTreel(2.,z);
   z=MULT(N,INV(D));
   if (MODULE2(SOUSTR(z,i)) <0.01) {putpixel(xe,ye,colorred[j]); break;}
   else if (MODULE2(ADD(z,i)) <0.01) {putpixel(xe,ye,colorgreen[j]); break;}
  }
}
```

b) Inverser la fonction  $N$ , ce qui donne un système  $F$  de deux fonctions. En faisant agir de façon répétée ce système, par exemple à partir d'un point, déterminer son attracteur, et faire le lien avec la question précédente.

A partir de  $z' = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$ , cherchons  $z$  en fonction de  $z'$ , ce qui donne  $z = z' \pm \sqrt{z'^2 + 1}$ . On obtient un système de deux fonctions. En faisant agir de façon répétée ces deux fonctions à partir d'un point quelconque, on constate expérimentalement que l'attracteur obtenu est formé de l'axe  $Ox$  ainsi que des points allant à l'infini (figure 8). Il est normal de retrouver, cette fois-ci comme attracteur, l'ensemble de Julia-Fatou de la fonction  $N$ .

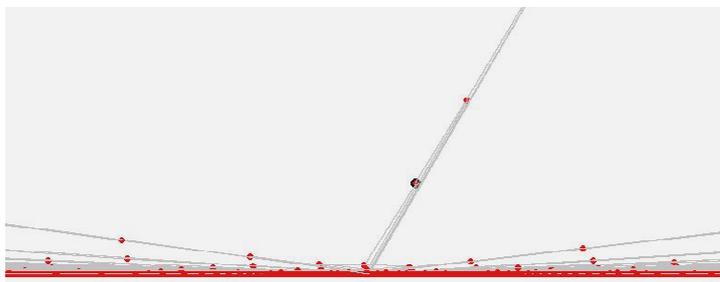


Figure 8 : En partant du point  $(1, 2)$  en noir, et en prenant ses deux transformés, puis en recommençant avec ces deux points, etc., on constate après une quinzaine d'itérations, qu'une partie des points part à l'infini, tandis que les autres viennent se coller sur l'axe des  $x$  (les points transformés à chaque étape sont en rouge).

Programme :

```

/* programme principal */
un.A=1.;un.B=0.;
z.A=1.; z.B=2.; filldisc(xorig+zoom*RE(z),yorig-zoom*IM(z),5,black);
traj(z,18);

/* fonction traj( ), qui transforme un point en deux points, de façon récursive */
void traj(struct complexe z, int n)
{ struct complexe z1,z2;
  if (n>0)
    { filldisc(xorig+zoom*RE(z),yorig-zoom*IM(z),3,red);
      z1=ADD(z,RAC(ADD(MULT(z,z),un)));
      z2=SOUSTR(z,RAC(ADD(MULT(z,z),un)));
      line(xorig+zoom*RE(z),yorig-zoom*IM(z), xorig+zoom*RE(z1),yorig-zoom*IM(z1),grey);
      line(xorig+zoom*RE(z),yorig-zoom*IM(z), xorig+zoom*RE(z2),yorig-zoom*IM(z2),grey);
      traj(z1,n-1); traj(z2,n-1);
    }
}

```

### 3) Etude théorique

a) Considérons la fonction homographique  $h$  faisant passer de  $z$  à  $z'$  par  $z' = \frac{z-i}{z+i}$ , qui envoie

notamment  $-i$  en  $\infty$  et  $\infty$  en  $1$ . Montrer qu'elle envoie l'axe des nombres réels sur le cercle unité de centre  $O$ .

En modules, on a  $|z'| = \frac{|z-i|}{|z+i|}$ . Appelons  $A$  le point d'affixe  $i$ ,  $B$  celui d'affixe  $-i$ ,  $M$  celui de  $z$  et  $M'$

celui de  $z'$ . L'égalité précédente devient  $OM' = MA / MB$ . En prenant  $z$  réel, cela signifie  $MA = MB$ , d'où  $OM' = 1$ . On passe bien de l'axe  $Ox$  au cercle unité. D'autre part, si  $M$  est dans le demi-plan au-dessus de  $Ox$ ,  $MA < MB$ , d'où  $OM' < 1$ . Ce demi-plan est envoyé sur le disque unité, et l'autre demi-plan est envoyé à l'extérieur du disque (figure 9).

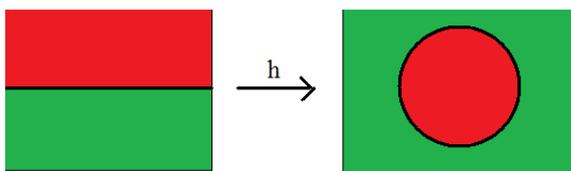


Figure 9 : Action de la fonction homographique  $h$  sur les points du plan.

b) Prendre un point  $M$  d'affixe  $z$  et son transformé  $M'$  ( $z'$ ) par  $N$ . Puis prendre les transformés  $P$  et  $P'$  de  $M$  et  $M'$  par  $h$ , d'affixes  $Z$  et  $Z'$ . Déterminer  $Z'$  en fonction de  $Z$ .

On a  $z' = N(z)$ , ainsi que  $Z = h(z)$  et  $Z' = h(z')$ , d'où :

$$Z' = h(z') = h N(z) = h N h^{-1}(Z). \text{ Avec } Z = \frac{z-i}{z+i}, \text{ on trouve en inversant }^9 z = -i \frac{Z+1}{Z-1}$$

$$Z \xrightarrow{h^{-1}} Z_1 = h^{-1}(z) = -i \frac{Z+1}{Z-1} \xrightarrow{N} Z_2 = N(Z_1) = \frac{1}{2} \left( Z_1 - \frac{1}{Z_1} \right) = -i \frac{Z^2+1}{Z^2-1} \xrightarrow{h} Z' = h(Z_2) = Z^2$$

en faisant les calculs.

Sous l'effet de  $h$ , l'action répétée de la fonction  $N$  devient l'action répétée de  $z^2$ .<sup>10</sup>

<sup>9</sup> En toute rigueur, il conviendrait d'ajouter le point  $\infty$ , avec pour  $Z = 1$ ,  $z = \infty$ ,  $h$  étant alors une bijection de  $\mathbb{C} \cup \infty$  sur lui-même, tout comme  $h^{-1}$ .

c) En déduire que les bassins d'attraction de  $i$  et  $-i$  sous l'effet de la fonction  $N$  forment les deux demi-plans séparés par l'axe des  $x$ .

On est censé connaître la dynamique de  $z^2$ . Sous l'effet de cette fonction, tout point extérieur au cercle unité a une trajectoire qui part à l'infini, et tout point intérieur a sa trajectoire qui tend vers 0. Il suffit pour cela de voir comment évoluent les modules des points successifs. On trouve ainsi deux bassins d'attraction, l'extérieur du cercle et son intérieur. Grâce au a), et en faisant agir  $h^{-1}$ , on en déduit que les bassins d'attraction de  $i$  et  $-i$ <sup>11</sup> pour la fonction  $N$  sont les deux demi-plans de part et d'autre de  $Ox$ . On sait aussi que sur le cercle unité, ensemble de Julia-Fatou associé à la fonction  $z^2$ , celle-ci provoque un mouvement erratique sur le cercle, puisque les arguments doublent à chaque étape. Il en est de même sur l'axe  $Ox$  sous l'effet de  $N$ .

### Exercice 3 : Transformation de Héron associée au polynôme $z^2 - 1$

Vérifier que la transformation de Newton-Héron  $N(z)$  associée à  $z^2 - 1$  est  $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ . En s'aidant de l'exercice précédent, montrer que les bassins d'attraction des deux racines  $\pm 1$  de  $z^2 - 1$ , qui sont aussi les deux points fixes de  $N(z)$ , sont les deux demi-plans séparés par l'axe des  $y$ .

$$N(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Introduisons la fonction homographique  $h$  telle que  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  qui envoie 1 en 0,  $-1$  en  $\infty$  et  $\infty$  en 1.

On vérifie aisément qu'elle transforme l'axe des  $y$  (avec  $\infty$  en plus) en le cercle unité de centre  $O$ . Il suffit pour cela d'utiliser les modules comme dans l'exercice précédent. Prenons un point  $M(z)$  et son transformé  $M'(z')$  par  $N$ , soit  $z' = N(z)$ , puis leurs correspondants par  $h$ , soit  $P(Z)$  et  $P'(Z)$  avec  $Z = h(z)$  et  $Z' = h(z')$ . On trouve que  $Z' = h^{-1} N h(Z) = Z^2$ . Connaissant la dynamique de  $Z^2$ , avec ses deux points fixes 0 et  $\infty$  ayant pour bassins d'attraction respectifs le disque unité et son complémentaire, on en déduit que les bassins d'attraction de 1 et  $-1$  sont les deux demi-plans séparés par l'axe des  $y$ . L'ensemble des points repousseurs de  $N$  est dense sur  $Oy$ , et l'axe des  $y$  (avec  $\infty$  en plus) constitue l'ensemble de Julia de la fonction  $N$ . Cela se vérifie expérimentalement, avec le résultat donné sur la figure 10. Si l'on part d'un point sur  $Oy$ , ses transformés successifs parcourent l'axe de façon chaotique, sauf cas exceptionnel comme la trajectoire de  $i$  :  $i \rightarrow 0 \rightarrow \infty \rightarrow \infty \rightarrow \dots$

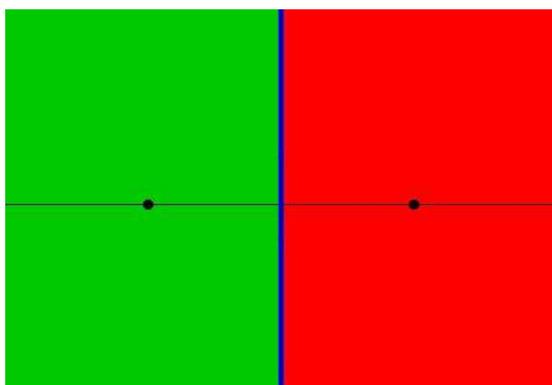


Figure 10 : En rouge et vert, les deux bassins d'attraction de 1 et  $-1$ .

<sup>10</sup> On dit que la fonction  $f(z) = z^2$  est la conjuguée de  $N(z)$  par le biais de la fonction homographique  $h(z)$  (auss appelée transformation de Möbius).

<sup>11</sup> On peut d'ailleurs vérifier que les points fixes de  $N$  et  $z^2$  se correspondent par  $h$ , puisque  $h(i) = 0$  et  $h(-i) = \infty$ .

Les deux exercices précédents peuvent se généraliser. Si l'on prend un polynôme de la forme  $z^2 - a$ , avec  $a$  nombre complexe donné, ayant deux racines complexes  $\pm\sqrt{a}$ , leurs bassins d'attraction sont les deux demi-plans séparés par la médiatrice  $\Delta$  du segment joignant les deux points racines (*figure 11*). Par analogie avec le raisonnement précédent, il suffit de faire intervenir la fonction homographique  $h(z) = \frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}}$ . Celle-ci transforme la médiatrice  $\Delta$  en cercle unité, et l'on a encore  $h^{-1} N h(Z) = Z^2$ .

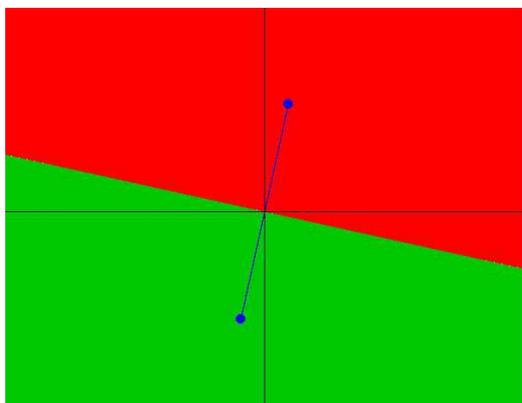


Figure 11 : Un exemple où les deux racines de  $z^2 - a$  sont en bleu, et leurs bassins d'attraction en rouge et en vert.

Prenons enfin le cas général d'un polynôme du second degré de la forme  $z^2 + az + b$ . On sait, grâce à la décomposition canonique de ce polynôme, qu'il s'écrit sous la forme  $(z + a/2)^2 - A$ . Ainsi il devient  $Z^2 - A$  en posant  $Z = z + a/2$ . On est ainsi ramené au cas précédent en pratiquant une translation supplémentaire de vecteur  $a/2$ , et l'on trouve encore les deux bassins d'attraction en forme de demi-plans séparés par la médiatrice du segment joignant les deux racines.

Jusqu'ici tout va bien, et l'on pourrait imaginer qu'en prenant des polynômes de degré supérieur à 2 on aurait encore un dispositif analogue. Par exemple pour  $z^3 - 1$ , avec ses trois racines  $1, j, j^2$ , on aurait trois bassins d'attraction formant trois secteurs angulaires autour de  $O$ , comme indiqué sur la *figure 12*. Mais on va voir qu'il n'en est rien.

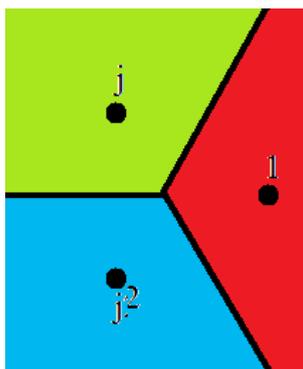


Figure 12 : Ce que l'on penserait pouvoir être les bassins d'attraction des trois racines de  $z^3 - 1$ .

## 5.2. Cas des polynômes de degré 3

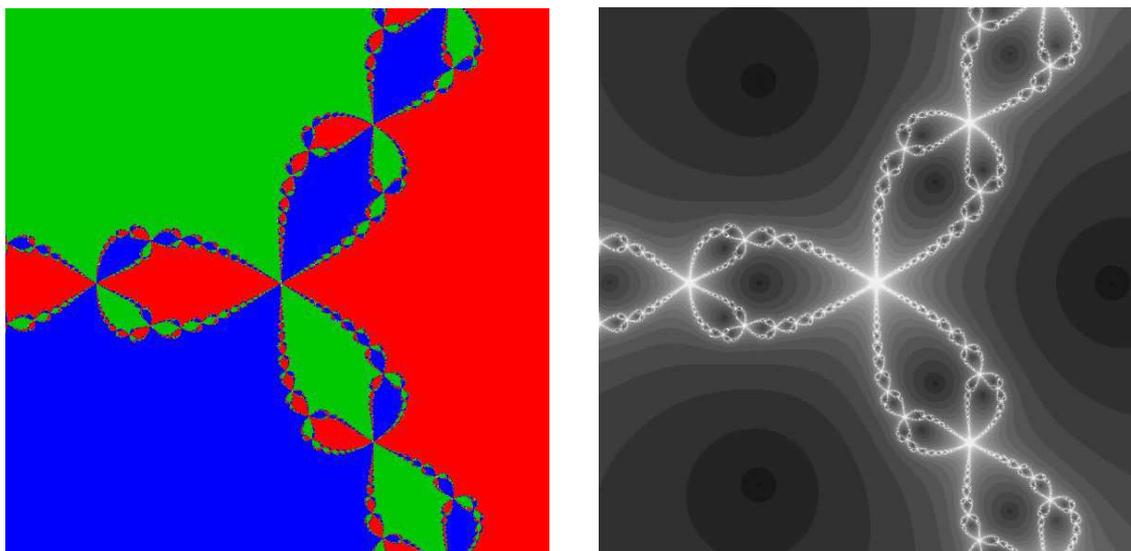
Considérons le polynôme  $f(z) = z^3 - 1$  dont la transformation de Newton associée est

$$N(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

Vérifions d'abord que les trois bassins d'attraction de  $1, j, j^2$  se déduisent de l'un d'eux par rotations autour de  $O$  d'angles  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$ .

Pour cela prenons un point  $z_1$  dans le bassin d'attraction de 1 par exemple. Sous l'effet de  $N$ , il devient  $z'_1 = \frac{2z_1^3 + 1}{3z_1^2}$ . Puis prenons  $z_2$  se déduisant de  $z_1$  par rotation de  $2\pi/3$ , soit  $z_2 = j z_1$ . Il est transformé par  $N$  en  $z'_2 = \frac{2z_2^3 + 1}{3z_2^2} = \frac{2z_1^3 + 1}{3j^2 z_1^2} = j z'_1$ . Si la trajectoire de  $z_1$  sous l'effet répété de  $N$  converge vers 1, alors celle de  $z_2$  se déduit de celle de  $z_1$  par rotation de  $2\pi/3$  et converge donc vers  $j$ . On ferait de même avec la trajectoire d'un point  $z_3 = j^2 z_1$  qui converge vers  $j^2$ .

Maintenant faisons le programme qui dessine les trois bassins d'attraction. On obtient le résultat de la *figure 13*, très différent de celui de la *figure 12*. On constate notamment que la trajectoire d'un point ne converge pas forcément vers la racine la plus proche de ce point.



*Figure 13* : A gauche, les trois bassins d'attraction de  $1, j, j^2$  en rouge, vert et bleu. A droite, on fait ressortir la vitesse de convergence vers les trois points. Plus un point est foncé, plus sa trajectoire converge rapidement vers la racine correspondante. La courbe frontière (en blanc) des bassins d'attraction est la courbe de Julia-Fatou de la transformation de Newton  $N$ .

Pourquoi le passage d'un polynôme de degré 2 à un polynôme de degré 3 provoque-t-il un tel changement ?<sup>12</sup>

Pour cela considérons la frontière séparant les bassins d'attraction, ce qui était une droite pour le second degré, et qui apparaît comme une courbe extrêmement complexe pour le degré 3. On l'appelle la courbe  $J$  de Julia-Fatou du polynôme concerné, et tous les points fixes repousseurs de la fonction  $N$  l'occupent de façon dense, ce qui s'exprime en disant que cette courbe est l'adhérence de l'ensemble des points repousseurs. Elle reste invariante sous l'effet de  $N$ , et aussi sous l'effet de la fonction inverse  $N^{-1}$ .

Prenons le point  $\infty$ . Montrons qu'il s'agit d'un point fixe, c'est-à-dire que  $N(z)$  tend vers l'infini  $\infty$  lorsque  $z$  tend vers  $\infty$ . Cela équivaut au fait que  $N(1/z)$  tend vers  $\infty$  lorsque  $z$  tend vers 0, ou encore que  $1/N(1/z)$  tend vers 0 lorsque  $z$  tend vers 0. Or  $N(1/z) = (z^3 + 2)/(3z)$ , et  $1/N(1/z) = 3z/(2 + z^3)$  qui tend bien vers 0 lorsque  $z$  tend vers 0. On a bien  $N(\infty) = \infty$ .

Le point fixe  $\infty$  est repousseur. En effet, en modules  $|\frac{N(z)}{z}| = \frac{|N(z)|}{|z|} = |\frac{2}{3} + \frac{1}{3z^3}| \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3|z|^3} \leq \frac{3}{4}$  dès que  $z$  dépasse quelques unités. On en déduit qu'à partir de  $u_0$  avec un module suffisamment grand

<sup>12</sup> J'ai utilisé la démonstration donnée dans [HOG1992].

$|u_n| \leq (3/4) |u_{n-1}|$ , la suite  $|u_n|$  est décroissante, le point  $\infty$  est donc repousseur. Ainsi le point fixe repousseur  $\infty$  appartient à la courbe de Julia-Fatou  $J$ .

Prenons maintenant la trajectoire de 0 sous l'effet de  $N : 0 \rightarrow \infty \rightarrow \infty \rightarrow \dots$ . Comme antécédent d'un point de  $J$ , 0 est aussi dans  $J$ .

Pour ce point  $O$  situé sur la frontière des bassins d'attraction, un petit voisinage autour de ce point empiète forcément sur un bassin d'attraction. On sait alors, en faisant des rotations autour de  $O$  d'angles  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$ , que les deux autres bassins d'attraction sont aussi dans ce même voisinage. Au voisinage de  $O$ , les trois bassins forment des secteurs angulaires qui l'entourent. Prenons enfin un point  $z$  quelconque sur la courbe de Julia-Fatou. Sachant que celle-ci est parcourue de façon dense par les inverses  $N^n(0)$  à partir du point 0 qui est sur elle, il existe parmi les points de cette trajectoire inverse un point  $z_0$  aussi près que l'on veut de  $z$ , soit  $z_0 = N^k(0)$  ou  $N^k(z_0) = 0$ . Comme les trois bassins sont présents dans un voisinage de 0, il en est de même dans un voisinage de  $z_0$ , et aussi de  $z$ .<sup>13</sup> Cela explique la forme fractale des frontières des bassins d'attraction, et leur aspect entrelacé,<sup>14</sup> à la différence de la droite obtenue pour les polynômes de degré 2 qui était la frontière de deux bassins seulement. Avec un polynôme du troisième degré, si un point est sur la frontière de deux bassins d'attraction, il est aussi sur la frontière avec le troisième.

Dans le cas où  $f(z) = z^3 - 1$ , on observe que les trois bassins d'attraction occupent tout le plan complexe. Il en est de même pour de nombreux polynômes complexes, comme on va le constater par exemple dans l'exercice 4. Mais il n'en est pas toujours ainsi, comme on le verra dans les exercices 5 et 6.

#### **Exercice 4 : Bassins d'attraction d'un polynôme du 6<sup>e</sup> degré**

Considérons le polynôme  $f(z) = (z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)(z^2 - z_3^2)$  qui admet 6 racines complexes :  $z_1, z_2, z_3$  et leurs opposés, en prenant par exemple  $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 5 + i$  et  $z_3 = 3 - 2i$ .

1) Développer ce polynôme, qui va s'écrire  $f(z) = z^6 - A z^4 + B z^2 - C$ .

On constate que  $A = z_1 + z_2 + z_3, B = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, C = z_1 z_2 z_3$ .

2) Déterminer la transformation de Newton  $N(z)$  associée à  $f(z)$ .

$$N(z) = z - \frac{z^6 - A z^4 + B z^2 - C}{6z^5 - 4A z^3 + 2B z} = \frac{5z^6 - 5A z^4 - B z^2 + C}{6z^5 - 4A z^3 + 2B z}$$

3) Faire le programme permettant le tracé des six bassins d'attraction des racines.

Le résultat est donné sur la figure 14.

<sup>13</sup> La fonction  $N^k$  est différentiable (on dit aussi qu'elle est analytique ou holomorphe) en  $z_0$ , avec  $N^k(z_0) = N^k(z_0) N^k(z_1) \dots N^k(z_{n-1})$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  étant les successeurs de  $z_0$ . On constate aussi que  $N^k(z_0) \neq 0$  car avec  $N'(z) = 2(z^3 - 1) / 3 z^3$ , cette dérivée n'est nulle que pour les trois racines de  $z^3 - 1$ . Dans ces conditions  $N^k$  réalise une bijection entre un voisinage de  $z_0$  et un voisinage de 0, et la fonction  $N^k$  est aussi différentiable sur un voisinage de 0.

<sup>14</sup> Cette forme fractale entrelacée est étudiée dans [NS1989].

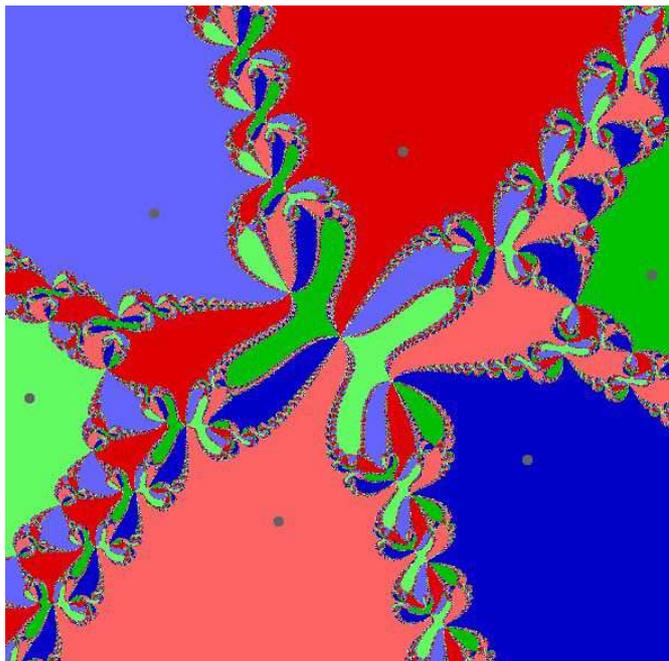


Figure 14 : Les six bassins d'attraction.

### **Exercice 5 : Bassins d'attraction et zones de non-convergence**

Considérons le polynôme  $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i\lambda)$  avec  $\lambda$  réel positif ou nul, dont les trois racines sont les deux nombres réels 1 et  $-1$ , ainsi que le nombre complexe  $i\lambda$  correspondant au point  $(0, \lambda)$ . Les trois points racines forment un triangle isocèle.<sup>15</sup>

1) Faire le programme permettant de dessiner les trois bassins d'attraction pour des valeurs de  $\lambda$  allant de 0 à 3. Observer la présence fugace d'une zone de non convergence pour certaines valeurs de  $\lambda$ .

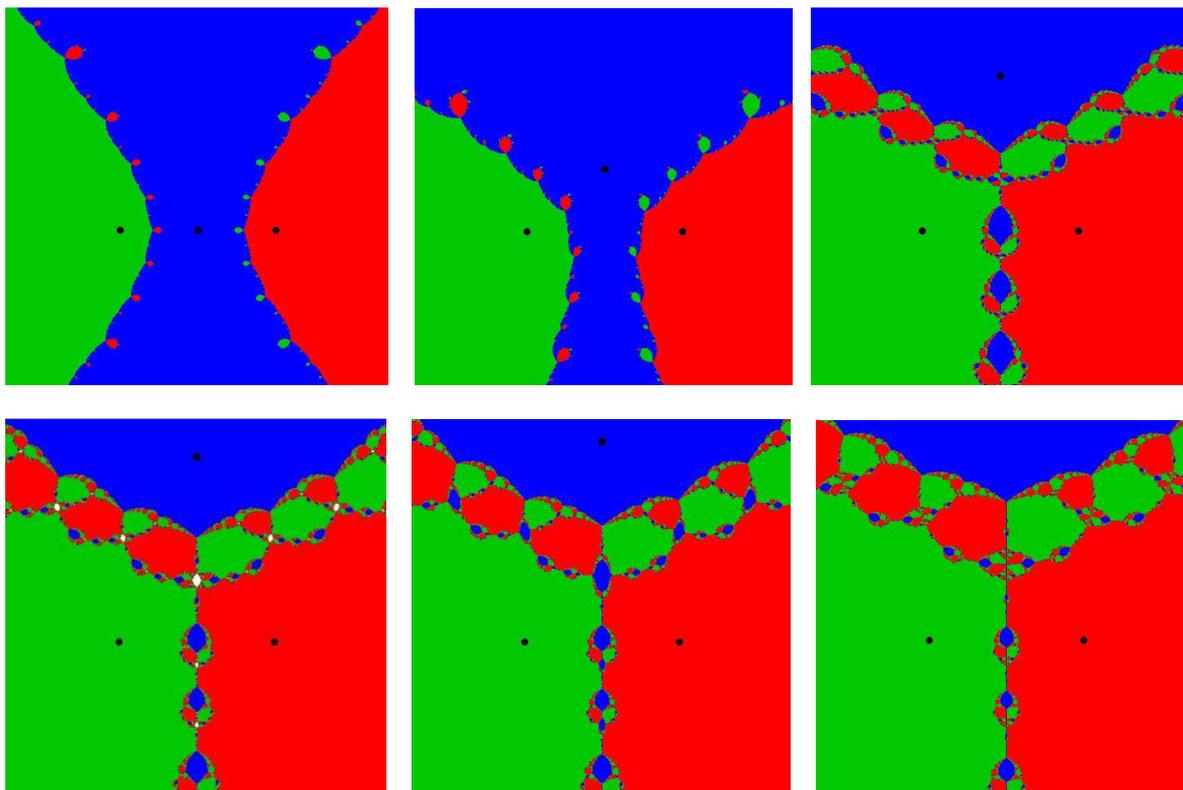
Pour  $\lambda = 0$ , avec les trois points racines alignés, les frontières des bassins d'attraction ont une forme d'hyperbole, avec des protubérances supplémentaires (figure 15). Lorsque  $\lambda$  augmente, le bassin d'attraction de la racine  $i\lambda$  présente un canal qui se resserre progressivement entre les deux autres bassins d'attraction. Pour  $\lambda = 1,732$ , le triangle des racines forme un triangle équilatéral et l'on retrouve un dessin analogue à celui de la figure 13. Cette valeur de  $\lambda$  correspond à la disparition du canal intermédiaire. Au-delà les bassins continuent de s'entrelacer. Mais aux alentours de  $\lambda = 2,4$ , on assiste à la formation de petites zones dont les points ne convergent pas vers l'une des trois racines. Notons que ces zones sont en nombre infini, se répétant régulièrement dans les rubans des bassins d'attraction. Cela signifie que la fonction de Newton n'a pas seulement trois points fixes, mais aussi un cycle attracteur fixe de deux points (ou plus), auquel cas la trajectoire des points qui en sont très proches finit par osciller sur ce cycle. Nous avons déjà rencontré ce problème dans le cas de la méthode de Newton avec des fonctions réelles à variable réelle.

2) Faire un grossissement du dessin pour les valeurs de  $\lambda$  où apparaissent des zones de non-convergence, en privilégiant celle qui est centrée sur le centre de gravité du triangle des racines. Qu'observe-t-on ?

En se positionnant autour de 2,4 pour  $\lambda$ , et en grossissant le dessin, on s'aperçoit que la zone de non convergence vers les racines évolue comme l'ensemble rempli de Julia-Fatou classique lorsque son paramètre  $c$  est réel. Comme forme particulière, on retrouve notamment le cercle ( $c = 0$ ), la fractale

<sup>15</sup> Il s'agit d'un exercice qui se trouve dans [BAR1988].

classique correspondant à  $c = -1$ , et d'autres bien connues (*figure 16*). En raffinant, on constate que l'apparition de cette zone est brutale (*figure 17*).



*Figure 15* : Evolution des bassins d'attraction pour  $\lambda$  allant de 0 à 3, en rouge et vert pour 1 et  $-1$ , en bleu pour la racine  $(0, \lambda)$ . A noter la présence de petites zones blanches sur le dessin en bas à gauche, ce qui correspond à des points ne convergeant pas vers l'une des trois racines.

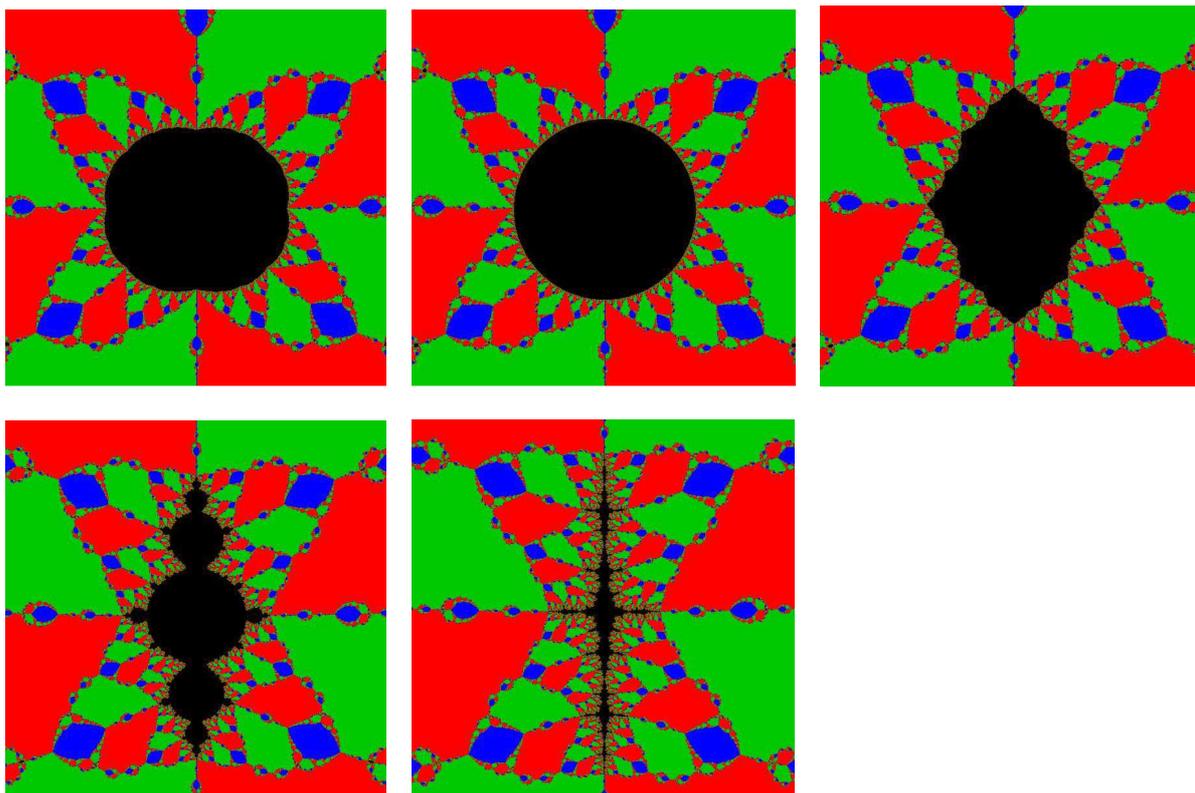


Figure 16 : Evolution de la forme fractale pour  $\lambda$  allant de 2,397 à 2,412. On retrouve des fractales de Julia-Fatou classiques.

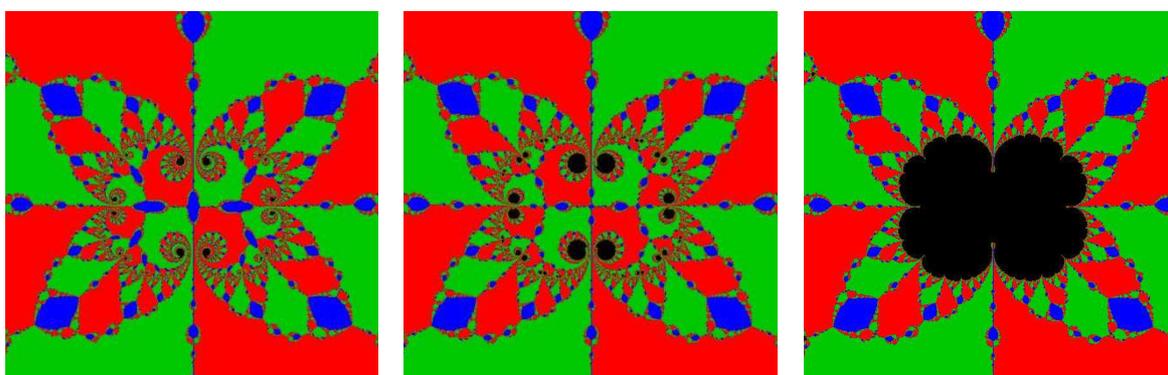


Figure 17 : Apparition brutale de la zone de non-convergence vers les trois racines, en noir, pour  $\lambda = 2,3934$ , puis 2,3935, et 2,3936.

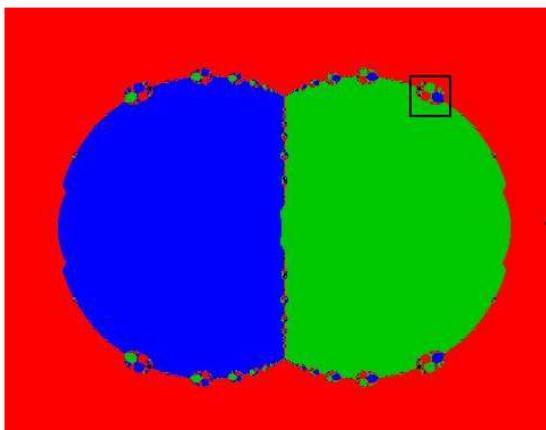
### **Exercice 6 : Ensemble de Mandelbrot de la transformation de Newton, et fractales de Julia associées**

Nous reprenons ici les travaux de S.N. Miller [MIL2006], qui a montré que tout polynôme cubique ayant au moins deux racines distinctes peut se ramener, par conjugaison via une fonction homographique, au polynôme :

$f(z) = (z-1)(z-a)(z+a)$  où  $a$  est un nombre complexe, avec la transformation de Newton associée :

$N_a(z) = \frac{2z^3 - z^2 - a^2}{3z^2 - 2z - a^2}$  où  $a$  joue le rôle de paramètre, avec une transformation  $N_a$  pour chaque valeur de  $a$ .

Maintenant, partons du point de coordonnées  $(1/3, 0)$  qui est le centre de gravité des trois points racines  $1$ ,  $a$  et  $-a$ . Pour chaque valeur de  $a$ , la trajectoire de ce point  $1/3$  sous l'effet de  $N_a(z)$  va converger vers l'une des trois racines, et l'on colorie ce point  $a$  avec une couleur associée à la racine concernée. On trouve comme résultat le dessin de la *figure 18*.



*Figure 18* : Les trois ensembles de points  $a$  selon que la trajectoire du point  $1/3$  sous l'effet répété de  $N_a(z)$  converge vers  $1$  (zone rouge), vers  $a$  (zone verte), ou vers  $-a$  (zone bleue).

Programme :

```
zoom=200.;xorig=400;yorig=300;
un.A=1.; un.B=0.;
for(xe=100;xe<700;xe++) for(ye=0;ye<600;ye++) /* parcours d'un carré sur l'écran */
{ x=(double)(xe-xorig)/zoom; y=(double)(yorig-ye)/zoom;
  a.A=x;a.B=y; /* le point écran (xe, ye) est le point calcul d'abscisse a */
  z.A=1./3.;z.B=0.; /* point de départ de la trajectoire */
  for(i=1;i<50;i++)
  { N1=MULT(z,MULT(z,z)); N1=MULTreel(2.,N1); N2=OPP(MULT(z,z));
    N3=OPP(MULT(a,a));
    N=ADD(N1,ADD(N2,N3)); /* numérateur de N_a */
    D1=MULTreel(3.,MULT(z,z));D2=MULTreel(-2.,z);
    D=ADD(D1,D2);D=ADD(D,N3); /* dénominateur de N_a */
    z=MULT(N,INV(D));
    if (MODULE2(SOUSTR(z,un)) <0.01) {putpixel(xe,ye,red);break;}
    else if (MODULE2(SOUSTR(z,a)) <0.01) {putpixel(xe,ye,green);break;}
    else if (MODULE2(ADD(z,a)) <0.01) {putpixel(xe,ye,blue);break;}
  }
}
```

On observe la présence de sortes de boursoufflures sur les circonférences des deux formes circulaires obtenues. En grossissant la plus grande,<sup>16</sup> cette zone étant encadrée sur la *figure 18*, on s'aperçoit de la présence d'un ensemble de Mandelbrot, correspondant à une zone de points  $a$  où les trajectoires ne convergent pas vers les racines (*figure 19*).

Cette surface n'a pas seulement l'aspect géométrique de l'ensemble de Mandelbrot<sup>17</sup>, elle en a aussi les propriétés. En effet, si l'on prend un point  $a$  situé en son intérieur, et que l'on pratique la

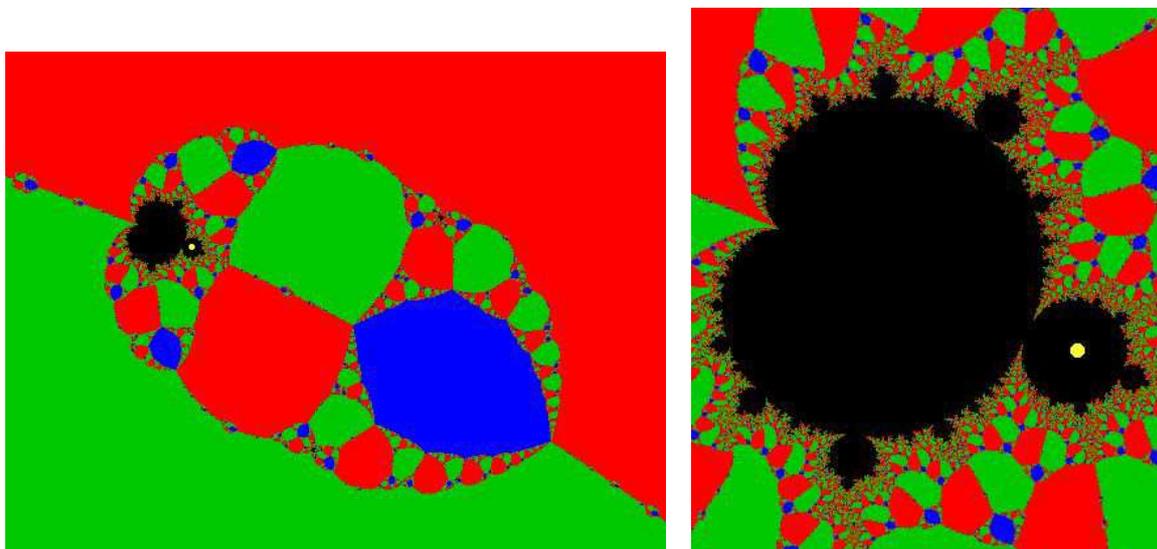
<sup>16</sup> Pour les formules permettant de faire un zoom, c'est-à-dire de représenter sur un carré de l'écran ce qui est un minuscule carré dans le dessin initial, se reporter sur mon site à *enseignements / informatique et mathématiques / nombres complexes / exercice 11*.

<sup>17</sup> Rappelons sa définition : En prenant la fonction du second degré  $f_c(z) = z^2 + c$ , l'ensemble de Mandelbrot est la surface occupée par les points  $c$  dont la trajectoire sous l'effet répétée de  $f_c$  à partir du point  $0$ , ne s'en va pas à l'infini. Pour chacun de ces points  $c$ , l'ensemble rempli de Julia-Fatou correspondant est connecté (ou connexe),

transformation  $N_a$  répétée à partir des points du plan, on observe sur le dessin final la présence de la fractale de Julia-Fatou associée à cette valeur de  $a$ , dont l'intérieur est formé des points initiaux dont la trajectoire ne converge pas vers une des trois racines (*figure 20*). Tous les points dont la trajectoire ne converge pas vers les racines forment des ensembles de Julia-Fatou, qui se répètent à des échelles diverses une infinité de fois.

Nous avons pris l'exemple classique avec  $c = -1$  dans  $f(z) = z^2 + c$ . Sa position dans l'ensemble de Mandelbrot originel est le centre du petit cercle collé à la cardioïde. Pour ce même ensemble, mais dans le contexte de la fonction de Newton, il s'agit du point  $a$  qui a pour coordonnées  $(0,6008, 0,61083)$ . Ce point, obtenu par tâtonnements successifs, est colorié en jaune sur la *figure 19*. L'ensemble de Julia-Fatou pour  $c = -1$  a une forme bien connue, et c'est celle que l'on retrouve, répétée à l'infini, dans le contexte de la fonction itérée de Newton  $N_{-1}$  (*figure 20*).

Le même phénomène se reproduit en prenant d'autres exemples. Comme la fractale dite du « lapin ». On l'obtient par itération de la fonction  $f(z) = z^2 + c$  pour  $c = -0,122 + i 0,745$ . Ce point  $c$  est à l'intérieur de la fractale de Mandelbrot, dans son bulbe principal, et sa position correspondante dans l'ensemble de Mandelbrot de la méthode de Newton est approximativement le point  $a = 0,5895 + i 0,6051$  (*figure 21 à gauche*). Puis en itérant la fonction de Newton pour cette valeur de  $a$ , on trouve des zones de non-convergence ayant une forme proche de la fractale du « lapin » (*figure 21 à droite*).



*Figure 19* : A gauche, ensemble de Mandelbrot surgissant dans une des boursouflures de l'espace du paramètre  $a$ . A droite, son grossissement 15 000 fois, avec en jaune le point correspondant à  $c = -1$  dans l'ensemble de Mandelbrot classique.

---

remplissant une surface ou en forme de filaments, tandis que pour les points  $c$  à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia-Fatou se réduit à une poussière de points.

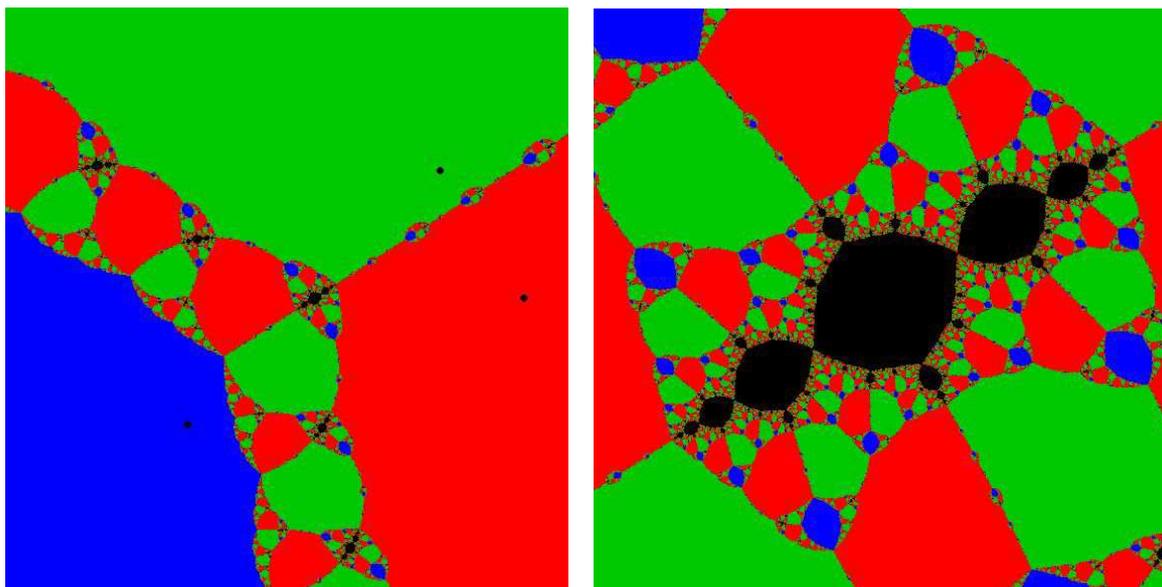


Figure 20 : A gauche, action répétée de la transformation  $N_{-1}(z)$  à partir de chaque point du plan. Ces points sont ensuite coloriés suivant leur convergence vers l'une des trois racines, sauf ceux qui ne convergent pas, et qui restent en noir, formant des ensembles de Julia-Fatou associés à  $c = -1$ . A droite, grossissement de l'ensemble central. On notera l'apparition d'un minuscule ensemble en bas à droite du dessin.

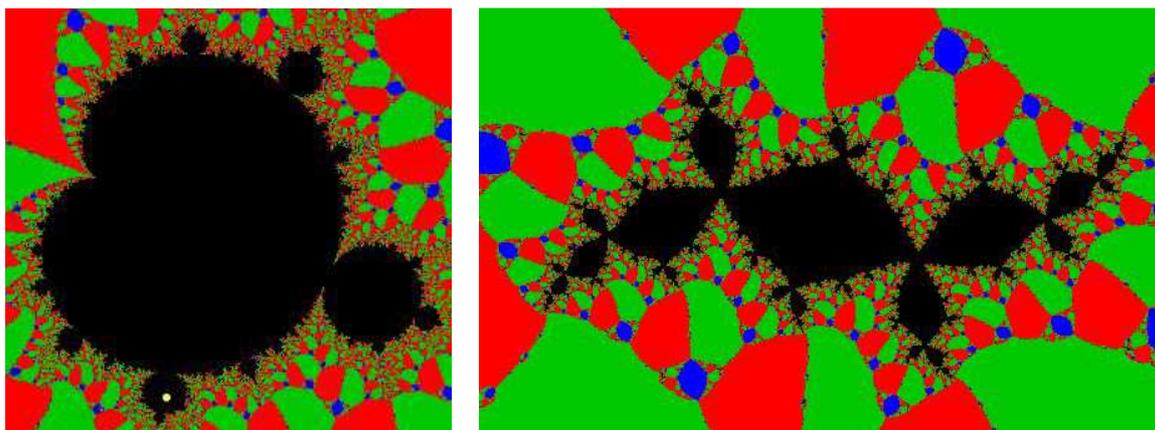


Figure 21 : A gauche la fractale de Mandelbrot dans le contexte de la fonction de Newton, avec le point  $a$  en jaune, correspondant à la fractale du « lapin ». A droite, sous l'effet de  $N_a$ , les zones de non-convergence ont une forme proche de la fractale du « lapin ».

Cette irruption de fractales de Julia-Fatou correspondant à des polynômes  $f(z) = z^2 + c$  du second degré, dans le cadre de fonctions de Newton associées à des polynômes du troisième degré n'est pas accidentelle. Une explication théorique est donnée dans [DH1985] et une application concrète dans [TAN2009].

---

### Note sur les programmes

Les programmes sont réalisés en langage C avec SDL. On trouvera une initiation à C-SDL sur mon site à *enseignements / cours d'algorithmique / chapitre 1 (initiation) et chapitre 10 (graphisme SDL)*. Les fonctions graphiques utilisées sont données dans *Book Programs / Graphical functions*.

Les fonctions associées aux calculs avec des nombres complexes se trouvent dans *enseignements / cours informatique et mathématiques / Nombres complexes*.

---

**Bibliographie**

[BAR1988] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.

[DH1985] A. Douady, J.H. Hubbard, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, 1985.

[HOG1992] S.G. Hoggar, *Mathematics for Computer Graphics*, Cambridge University Press, 1992.

[MIL2006] S.N. Miller, *The Dynamics of Newton's Method on Cubic Polynomials*, Marshall Digital Scholar, 2006.

[NS1989] M. Nauenberg, H.J. Schellnhuber, *Analytic evaluation of the multifractal properties of a Newtonian Julia set*, Phys. Rev. Lett., 62, 1989.

[TAN2009] Tan Lei, *La méthode de Newton et son fractal*, Images des mathématiques, CNRS, 2009.