Chemin en lacets d'un robot

(ou encore, $\boldsymbol{Q}$ est dénombrable)

Un robot est programmé pour parcourir de la façon suivante un quart du plan, délimité par les bordures qui sont les axes *Ox* et *Oy*, en partant du point *O* (0, 0) et en circulant en diagonale, comme indiqué sur la *figure 1* :

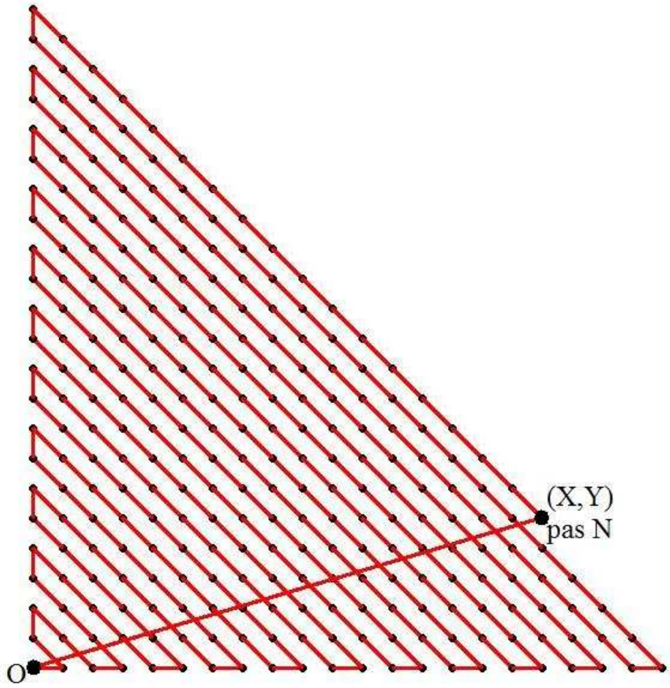

Figure 1 : Mouvement du robot

On a tracé une grille de points sur le quart de plan, ces points étant à coordonnées entières. Le robot passe successivement sur ces points où il est par exemple chargé de creuser un trou. Le nombre de pas *N* qu'il doit faire est donné, étant entendu que les pas sur les axes ont une longueur 1 et ceux en diagonale une longueur $\sqrt{2}$. Le nombre *N* est aussi bien le nombre d'intervalles de temps pendant lequel le robot évolue, avec un temps unité en chaque pas (en considérant que sa vitesse est de $\sqrt{2}$ en diagonale et de 1 sur les axes, vitesse plus faible car il doit en plus tourner). Les points de la grille sont numérotés dans l'ordre où ils sont atteints par le robot (*figure 2*). Lorsque le robot atteint le point numéro *n*, cela veut dire qu'il a circulé sur *n* pas (ou pendant *n* unités de temps). Au bout des *N* pas qu'il doit faire, le robot est au point final (*X*, *Y*). Il doit enfin revenir en ligne droite vers son point de départ *O*, mais comme il n'a pas de GPS, on doit lui indiquer la direction qu'il doit prendre.

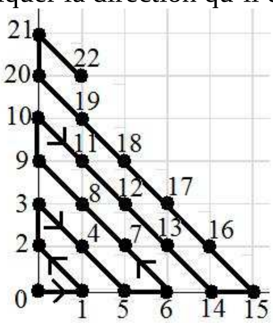

Figure 2 : Numérotation des points atteints dans l'ordre par le robot

1) *Programmer le mouvement du robot sur N pas*

A chaque pas, on passe du point (x, y) au point (*newx*, *newy*). L'astuce consiste à gérer une troisième variable *sens* qui vaut 1 ou – 1, selon que l'on va vers la droite ou vers la gauche. Cette variable change de signe chaque fois que l'on quitte un des deux axes. Commençons par faire le premier pas, menant de (0, 0) à (1, 0), et l'on met sens à –1 (puisqu'on va aller vers la gauche ensuite).

On distingue alors plusieurs configurations :

- Le robot n'est pas sur un des axes (*sens* vaut 1 ou – 1) : *newx* = x + *sens*, *newy* = y – *sens*.
- Il est arrivé sur l'axe des x (y = 0 et l'on avait *sens* = 1) : *newx* = x + 1, *newy* = y, et l'on fait *sens* = - *sens* pour la suite, d'où *sens* = –1.
- Il quitte l'axe des x (on avait *sens* = – 1) : *newx* = x + *sens*, *newy* = y – *sens*.

Et de même selon que le robot arrive ou quitte l'axe des y.

On en déduit le programme :

```
x=1;y=0; t=1; sens=-1;   N est donné
filldisc(xorig,yorig,2,black);filldisc(xorig+zoom,yorig,3,black);
linewithwidth(xorig,yorig,xorig+zoom,yorig,1,couleur[0]); SDL_Flip(screen);
for(t=2;t<=N;t++)
  {  if (x!=0 && y!=0) { newx=x+sens; newy=y-sens;}
     else if (y==0 && sens==-1) { newx=x+sens; newy=y-sens;}
     else if (y==0 && sens==1) { newx=x+sens; newy=y;sens=-sens;}
     else if (x==0 && sens==1) { newx=x+sens; newy=y-sens;}
     else if (x==0 && sens==-1) { newx=x; newy=y+1; sens=-sens;}
     linewithwidth(xorig+zoom*x,yorig-zoom*y,xorig+zoom*newx,yorig-zoom*newy,1,red);
     filldisc(xorig+zoom*newx,yorig-zoom*newy,3,black);SDL_Flip(screen);
     x=newx;y=newy;
  }
```

2) *Pourquoi y a-t-il bijection entre le numéro d'un point à coordonnées entières (x, y) quelconque et son numéro n ? En déduire qu'il y a autant de fractions y / x (ici avec x et y positifs) que de nombres entiers naturels. On dit que l'ensemble des fractions, ou ensemble des nombres rationnels, ici* ***Q+****, est dénombrable.*

Le mouvement du robot prouve qu'à chaque numéro n correspond un point unique (x, y) et qu'à chaque point (x, y) correspond un numéro. Cela signifie qu'il y a une bijection entre (x, y) et n. Il y a autant de couples d'entiers que d'entiers. Et comme on peut associer à tout couple (x, y) une fraction y / x et vice versa, il y a finalement bijection entre les fractions positives et les nombres entiers naturels. Pour avoir une bijection entre les fractions positives ou négatives et les entiers naturels, il suffirait de donner deux numéros successifs à chaque point à partir du point (1, 0), un numéro pour la fraction positive et le suivant pour la négative. Ainsi, l'ensemble des nombres rationnels ***Q*** est dénombrable.

3) *Connaissant le point (x, y) on veut déterminer la formule qui donne son numéro n = f(x, y).*

a) *Commencer par changer la numérotation, comme indiqué sur la* figure 3, *de façon à simplifier les calculs. En numérotant les diagonales successives 0, 1, 2, 3, etc. quelle est l'équation de la diagonale numéro k ? Si le point (x, y) a le numéro n dans cette nouvelle numérotation, quel est son numéro dans l'ancienne numérotation, celle utilisée par le robot ?*

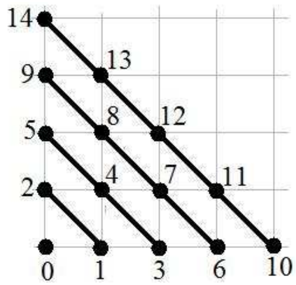

Figure 3 : La nouvelle numérotation

L'équation de la diagonale numéro k est $y = -x + k$, ou $x + y = k$. Si $k = x + y$ est impair, le parcours diagonal est le même dans les deux numérotations. Si $k = x + y$ est pair, un point (x, y) dans la nouvelle numérotation est le point (y, x) dans l'ancienne : il suffit d'échanger x et y pour passer d'un cas à l'autre.

b) *Dans la nouvelle numérotation, déterminer le numéro n' du point en fonction de ses coordonnées (x, y), soit n' = g(x, y).*

Formons $x + y = a$, a étant le numéro de la diagonale. Plaçons-nous sur l'axe des x, où $g(x, 0)$ est le numéro du point $(x, 0)$, et l'on a $g(0, 0) = 0$, $g(1, 0) = 1$, $g(2, 0) =3$, $g(3, 0) = 6$, etc. Comme la diagonale a sa longueur qui augmente de 1 quand on passe à la suivante, on a $g(k, 0) = g(k-1, 0) + k$. On en déduit par récurrence que $g(k, 0) = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = k(k + 1)/2$, et en particulier $g(a, 0) = a(a+1)/2$. Quand on connaît le point $(a, 0)$ le plus bas de la diagonale où se trouve le point (x, y), on part de ce point sur Ox en montant jusqu'à (x, y) et l'on a $g(x, y) = g(a, 0) + y$. Finalement :

$n' = g(x, y) = (x + y)(x + y + 1)/2 + y$

c) *En déduire n = f(x, y) pour le robot.*

- Si $x + y$ est impair : $n = (x + y)(x + y + 1)/2 + y$
- Si $x + y$ est pair : $n = (x + y)(x + y + 1)/2 + x$

4) *Inversement, connaissant le numéro du point, déterminer ses coordonnées (x, y), en se plaçant d'abord dans la nouvelle numérotation, puis en revenant à celle du robot.*

Soit n le numéro dans la nouvelle numérotation. Appelons u_k le numéro du point $(k, 0)$ de la diagonale numéro k, sachant que $u_k = k(k + 1)/2$. Pour savoir sur quelle diagonale se trouve le point n, on cherche le plus grand des u_k inférieur ou égal à n, soit $k(k + 1)/2 \leq n$ avec k le plus grand possible. Cela donne une inéquation du deuxième degré en k : $k^2 + k - 2n \leq 0$, de racines $(-1 \pm \sqrt{1+8n'})/2$. L'inéquation est vérifiée pour k entre les racines, en fait entre 0 et la racine positive. Le plus grand k cherché, à savoir le numéro de la diagonale, est $b = \left[(-1+\sqrt{1+8n})/2\right]$, les crochets désignant la partie entière. Le point concerné sur la diagonale est $u_b = b(b + 1)/2$. Puis on détermine $n - u_b = c$ qui indique combien de pas on fait sur la diagonale pour monter jusqu'au point n. Le point cherché (x, y) a pour coordonnées $(b - c, c)$.

Si maintenant n est le numéro dans l'ancienne numérotation, on distingue deux cas : si $x + y$ est impair, avec $(x, y) = (b - c, c)$, on garde le même point, et si $x + y$ est pair, on échange les coordonnées, d'où $(x, y) = (c, b - c)$. Il suffit de donner l'ordre au robot de revenir en O en empruntant une direction de pente y/x. Le tracé de ce retour conduit à ajouter dans le programme :

```
b=(-1+sqrt(1+8*N))/2;
c=N-b*(b+1)/2;
X=b-c; Y=c;
if ((X+Y)%2==0) { aux=X; X=Y;Y=aux;}
linewithwidth(xorig+zoom*X,yorig-zoom*Y,xorig,yorig,1,red);
```